Е. А. МЧЕДЛИШВИЛИ

МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Тбилиси — 1974

Е.А.Мчедлишвили

М Е Т О Д Ы   И З О Б Р А Ж Е Н И Й

(Лекции по специальному курсу начертательной геометрии)

Грузинский политехнический институт им.В.И.Ленина

Тбилиси - 1974

ე.მჭედლიშვილი

გამოსახულებათა მეთოდები

(ლექციები მხაზველობითი გეომეტრიის სპეციალურ
კურსში)

(რუსულ ენაზე)

ვ.ი. ლენინის სახელობის საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტი

თბილისი -1974

Напечатано на ротапринте
Редактор Д.А. Мириманова

Сдано в производство I8/II – 1974 г. Подписано к печати I4/II-I974 г. Формат бумаги 60X90 I/I6. Печатных листов I3. Учетно-изд. листов 8.

Цена 60 коп.

Заказ № 227 УЭ 05167 Тираж I000

Типография ГПИ, ул. Ленина, 69.
სპი-ს სტამბა, ლენინის ქ. №69.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Издавна было замечено, что пространственные фигуры находятся в определенной геометрической связи со своими плоскостными изображениями, полученными проектированием. Изучение геометрической сущности этой связи и привело к начертательной геометрии, которая до начала девятнадцатого столетия главным образом, основывалась на интуиции и поэтому всегда страдала отсутствием геометрической строгости и общности при достижении указанной цели.

Этот недостаток в значительной мере был восполнен выдающимися работами Гаспара Монжа и его последователей. Все разделы и задачи, существовавшие до Монжа разрозненно и обособлена друг от друга, были объединены под общей геометрической основой- методом проэктирования пространственных образов на плоскость изображения. Наконец, открытие теоремы Польке-Шварца, способствуя развитию нового раздела начертательной геометрии- аксонометрии, намного продвинула ее вперед, как стройную, в смысле логической строгости, геометрическую дисциплину.

Не несмотря на большие успехи, начертательная геометрия времен Монжа, Польке и Шварца не смогла полностью восполнить вышеуказанный пробел, так как она основалась на элементарной геометрии Евклида и поэтому была не в состоянии вскрыть геометрической сущности метода проектирования.

Классическая начертательная геометрия, как наука оформившаяся раньше проективной геометрии, метод проектирования пространственных фигур рассматривает как простое пересечение проектирующих лучей с плоскостью проекций, не видя в нем проективного преобразования, таившего в себе большие обобщающие возможности.

Поэтому она не смогла полностью разрешить вопрос пространственности плоскостного изображения, остающийся актуальным и в настоящее время.

Известно, что методами Монжа, аксонометрии, Федорова, перспективы и числовых отметок точки, прямые и плоскости однозначно проектируются на плоскость проекций и в совокупности определяют изображение всего трехмерного пространства Евклида. Показывается, что в каждом отдельном изображении, уже независимо от пространства, могут быть выполнены некоторые пространственные построения позиционного и метрического характера. Однако остается не доказанным строго, как далеко могут быть продолжены такие построения. Или, существуют ли построения, которые не могут быть осуществлены на плоскости проекций. И, наконец, нет решения вопроса и полной выполнимости всех позиционных и метрических построений.

Все это делает классическую начертательную геометрию такой же несостоятельной, какой она была до времен Монжа, и приводит к известной задаче построения плоскостных моделей трехмерного и вообще многомерных пространств. Эти модели, являясь вырожденными случаями обыкновенных пространств, дают возможность проектирование трехмерного пространства рассматривать как его проективное преобразование в вырожденное плоскостное трехмерное пространство. При таком толковании проектирования, ряд сложных вопросов начертательной геометрии, одним из которых является выявление геометрической сущности взаимосвязи отдельных методов изображений, решаются чрезвычайно легко методами проективной геометрии.

Идея рассмотрения проектирования как проективного преобразования связана с возникновением и созданием проективной геометрии. Внимание исследователей было обращено на то,что проектирование прямолинейных точечных рядов и плоских полей, есть их проективное преобразование. Поэтому, вся теория проективного соответствия прямолинейных рядов и плоских полей успешно была применена к задачам начертательной геометрии, и в настоящее время этот вопрос следует считать полностью разрешенным. Многочисленные в этом направлении полезные приложения общеизвестны и широко распространены в существующей литературе.

Однако приложение проективной геометрии не имело такого успеха в случае проектирования трехмерного пространства. Препятствием явилось то обстоятельство,что при проектировании трехмерное пространство на плоскость проекций проектируется в плоское поле, в то время как проективное преобразование трехмерного пространства дает также трехмерное пространство. Принятым в начертательной геометрии положениям,что прямолинейный ряд точек проектируется в прямолинейный же ряд, а плоское поле также в плоское поле,противоречат случаи, когда проектируемый ряд точек и плоское поле принадлежат центру проектирования. При таких условиях прямолинейный ряд точек проектируется в точку, а плоское поле в прямолинейный ряд точек. Поэтому задачи, связанные с этим случаем, вызывающие немало затруднений, особо оговариваются и в ущерб стройности изложения, решаются специально для них созданными способами.

Из вышеизложенного следует ,что проектирование точечного трехмерного пространства на плоскость проекций также есть особый случай его проектирования. Обыкновенным случаем будет проектирование трехмерного пространства на трехмерное же. Но с точки зреначертательной геометрии, как прикладной науки, интересн именно упомянутый особый случай проектирования. Для возможности выявления геометрической взаимосвязи и обобщенной трактовки методов изображения, а также общего решения задач начертательной геометрии необходимо,чтобы проектирование трехмерного пространства на плоскость проекций рассматривалось как его преобразование в трехмерное же пространство.

В настоящей работе предлагается одно из возможных изложений материала по методам изображений, соответствующего указанным требованиям. I гл. посвящена изучению однозначности соответствия между проектируемым пространством и его проекционным изображением. Во второй главе проекционное изображение обобщается на общий случай коллинеарного отображения пространства на плоскость. Решаются возникшие, в связи с обобщением, вопросы об основных предложениях центрального и параллельного проектирования. Затем, из установленных общих положений об изображениях, выполнением практических требований инженерного чертежа определяются практически приемлемые методы изображений. Наконец,в третьей главе, как дальнейшее обобщение коллинеарного изображения, излагается построение плоскостной модели трехмерного пространства. Четвертая и пятая главы посвящены позиционным и метрическим построениям в плоскостной модели трехмерного пространства.

Она предназначена для преподавателей кафедр начертательной геометрии, аспирантов, соискателей степени, спецсеминарных занятий студентов и преподавателей кафедр геометрии педагогических Вузов.

ГЛАВА I. ПРОЕКЦИОННОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

§ I. Однозначность соответствия между пространством и его плоским изображением

В проектируемом пространстве выберем произвольную плоскость проекций π и центр проектирования S. Произвольную (рис.I) пару плоских полей π_1' и π_2' с прямой их пересечения X' примем за основные поля. Покажем, что при таких условиях изображение пространства, полученное проектированием из центра S на плоскость π, будет однозначно соответствовать проектируемому пространству. Действительно, проектированием из S получим перспективные соответствия

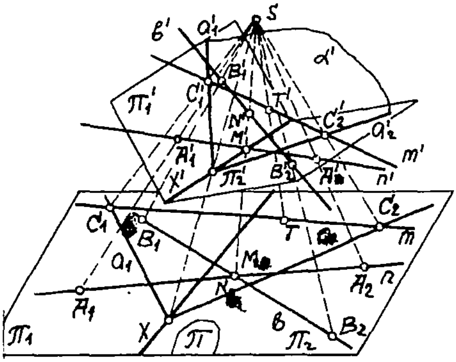


Рис.1

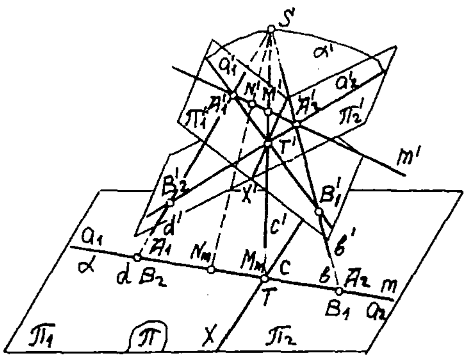


Рис. 2

$$\pi_1' \overline{\overline{\wedge}} \pi_1 , \quad \pi_2' \overline{\overline{\wedge}} \pi_2 , \qquad X' \overline{\overline{\wedge}} X. \qquad \text{(I)}$$

Произвольная прямая n' пространства пересекается с основными полями в двух точках A_1' и A_2'. По перспективностям (I) этим точкам на плоскости проекций соответствуют однозначно две точки A_1 и A_2, которые определят прямую n, соответственную прямой n'. И наоборот, произвольной прямой n на плоскости π, являющейся проекцией прямой n', по перспективностям (I) в прост –

ранстве соответствует единственная прямая n'. Здесь следует заметить, что прямая n на плоскости π не может быть задана без точек A_1 и A_2, принадлежащих плоским полям π_1 и π_2. Различность прямых на плоскости проекций π обуславливается различными парами точек, принадлежащими основным полям. Например, парой точек C_1 и C_2 будет задана отличная от n прямая m, которой в пространстве по перспективностям (I) соответствует уже другая, отличная от прямой n' прямая m'. Точке M', принадлежащей прямой n', на плоскости проекций π соответствует точка M_n, принадлежащая прямой n. Но если M_n рассматривается как точка принадлежащая прямой b, в связи с чем обозначается другой буквой N_b, то ей в пространстве будет соответствовать точка N', принадлежащая прямой b' и отличная от точки M'.

Произвольная плоскость α' в пространстве пересечет основные поля π_1' и π'^2 по двум прямым a_1' и a_2', пересекающимся на прямой X'. Этим прямым по перспективностям (I) на плоскости соответствует единственная пара прямых a_1 и a_2 полей π_1 и π_2, которые также будут пересекаться на прямой X и определят поле-плоскость α, соответственную плоскости α'. Легко убедиться, что любой плоскости на π, заданной двумя пересекающимися на X прямыми a_1 и a_2 по перспективностям (I), в пространстве соответствует единственная плоскость α'. Точка T, принадлежащая плоскости α, задается при помощи прямой m, которая сама должна быть задана точками C_1 и C_2, принадлежащими прямым a_1 и a_2.

Таким образом, проектирование трехмерного пространства на плоскость проекций дает изображение, находящееся во взаимно однозначном соответствии с проектируемым трехмерным пространством. При этом, соответствие это сохраняет принадлежность элементов пространства. Точка, принадлежащая прямой или плоскости, изображается на плоскости изображения /тоже самое что и плоскость проекций/ точкой, также принадлежащей изображению прямой или плоскости.

Однако особо следует рассмотреть изображения прямых и плоскостей, которые при проектировании вырождаются и поэтому называются вырожденными прямыми и плоскостями плоскости изображений. Здесь имеются в виду элементы проектирующей связки с центром в точке S, т.е. проектирующие прямые и плоскости, проходящие через центр проектирования S.

Пусть пространство при основных полях π_1' и π_2' из точки S' спроектировано на плоскость проекций π (рис.2). Произвольная проектирующая плоскость, например α_1', с прямыми a_1' и a_2' на основных полях, изобразится в виде одной прямой α, а проектирующие прямые a', b', c', лежащие в плоскости α', спроектируются в множество точек a, b, c, принадлежащих прямой α. Поэтому проекции всех точек и прямых плоскости α' также расположатся на прямой α, как например, M, m, T, A_2 и т.д.

Однако, несмотря на такое вырождение проекции плоского поля α' в прямую α, однозначность между проектируемыми элементами и их изображениями, расположенными на прямой α, все-таки будет существовать. Действительно, по-прежнему, произвольная прямая m' плоскости α', основные поля π_1' и π_2' пересечет в точках A_1' и A_2', расположенных на прямых a_1' и a_2', являющихся следами α' на основных полях. По перспективностям (I) прямым a_1' и a_2' на плоскости π соответствуют слившиеся с прямой α ,но различные по принадлежностям прямые a_1 и a_2 . Прямая a_1 принадлежит полю π_1 , а a_2 принадлежит полю π_2, пересекаются они на прямой X в единственной точке T, соответствующей в пространстве точке T' на прямой X' . Точки A_1' и A_2' спроектируются в точки A_1 и A_2, принадлежащие прямым a_1 и a_2 и определят на изображении прямую m, соответствующую в пространстве прямой m'. Точки M_m, N_m... и т.д. принадлежащие прямой m по перспективностям (I) однозначно соответствуют в пространстве точкам M', N' ... и т.д. на прямой m'. Указанное справедливо и для проектирующих прямых a', b', c' принадлежащих плоскости α'. Любая из этих прямых, как, например, a' пересекает основные поля в двух точках A_1' и B_2' лежащих на прямых a_1' и a_2'. Этим точкам на плоскости π соответствуют две точки, слившиеся в одну точку A_1 и B_2. Но эти точки различны, так как одна принадлежит полю π_1 , другая же полю π_2. Поэтому на плоскость проекций π они задают хоть и вырожденную в точку, но единственную прямую a. Таким образом, особенностью плоскости проекций является существование не только обычных, но и вырожденных изображений прямых и плоскостей. Изображение проектирующей прямой вырождается в точку, а проектирующей плоскости в прямую.

§ 2. Выполнимость пространственных позиционных построений на плоскости изображений.

Усмотренная в предыдущем параграфе однозначность соответствия между пространством и его изображением, установленное проектированием / центральным, параллельным или ортогональным/ приводит нас к результату большого практического значения. Результат этот заключается в возможности выполнения на плоскост изображений (то же самое ,что и плоскость проекций или плоскость чертежа) всех пространственных позиционных и метрических построений. В настоящем параграфе рассматривается выполнимость только позиционных построений.

Любое позиционное построение в трехмерном пространстве состоит из цепи последовательно выполненных элементарных построений, представляющих собой определенные геометрические операции над точками, прямыми и плоскостями трехмерного пространства и определяют конструкцию, соответствующую рассматриваемому пространственному построению. Но, как было показано, проектирование пространства на плоскость проекций, устанавливает взаимно однозначное соответствие, сохраняющее принадлежность геометрических элементов. В силу этого на изображении, независимо от проектирования, могут быть выполнены все геометрические операции, дающие в совокупности изображение всего пространственного построения.

Разумеется нет необходимости показывать выполнимость каждого пространственного построения в отдельности. Это и невозможно, так как построений вообще может быть бесконечно много. Достаточно показать лишь выполнимость только основных, первоначальных построений аксиоматического характера, из которых следует выполнимость всех остальных возможных пространственных построений. Эти построения следующие:

I. Каковы бы ни были две точки, можно построить не более чем одну принадлежащую им прямую.

2. На каждой прямой существуют по крайней мере две точки. Можно построить три точки, не принадлежащие одной прямой.

3. Для каждой тройки точек, не лежащих на одной прямой, можно построить не более чем одну проходящую через них плоскость. На каждой плоскости существует по крайней мере одна точка.

4. Двумя точками, принадлежащими плоскости, можно построить принадлежащую этой плоскости прямую.

5. Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют еще одну общую точку.

6. Можно построить четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

Покажем, что перечисленные выше основные построения действительно выполняются на плоскости изображений.

Пусть на плоскости проекций π заданы (рис.3) основные поля π_1, π_2 и прямая их пересечения X, являющиеся результатом перспективностей $\pi_1' \overline{\wedge} \pi_1,\ \pi_2' \overline{\wedge} \pi_2$ и $X' \overline{\wedge} X$. (I). Это означает, что по отношению к плоскости π в трехмерном пространстве заданы определенные основные поля π_1' и π_2' и центр проектирования S, из которого поля π_1' и π_2' проектируются в поля π_1 и π_2.

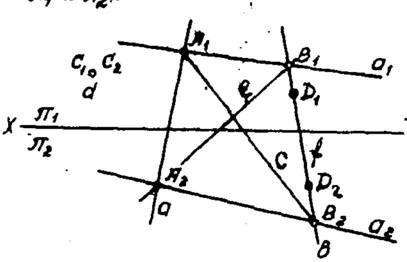


Рис. 3

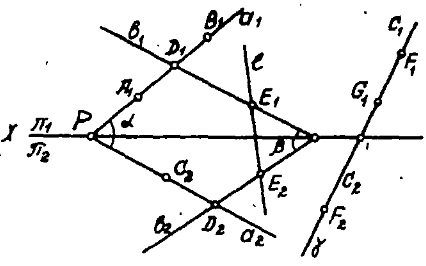


Рис. 4

Заметим, что в выполнимости перечисленных выше основных пространственных построений на плоскости π по существу мы уже убедились в предыдущем параграфе. Но там все рассуждения всегда основывались на свойствах проектирования пространства из центра S. Теперь мы хотим показать выполнимость указанных построений непосредственно на плоскости π, пользуясь только различностью полей π_1 и π_2, полученной проектированием из S. При этом поля π_1 и π_2 имеют общие точки только на прямой X. После этих замечаний приступим к выполнению основных пространственных построений, не повторяя текста формулировки каждого из них.

<u>Построение I</u> (рис.3). Пары точек на плоскости π могут быть следующие: принадлежащие полю π_1 либо π_2, как, например, (A_1, B_1) и (A_2, B_2). Принадлежащие различным полям, как например, (A_1, A_2), (B_1, B_2), (A_1, B_2), (B_1, A_2), (C_1, C_2). Во всех этих случаях для каждой пары точек может быть построена не более одной прямой. Например, для пар (A_1, B_1) и (A_2, B_2) прямые a_1 и a_2. Первая будет принадлежать полю π_1 вторая π_2. С помощью пар (B_1, B_2), (A_1, B_2), (B_1, A_2) и (C_1, C_2) могут быть построены прямые a, b, c, e, d .... Ни одна из этих прямых не принадлежит одному из полей π_1 и π_2. Допущение противного приведет к противоречию с первоначальным условием о различности полей π_1 и π_2. Действительно, допустим, что прямая a принадлежит полю π_1. Тогда точка A_2 будет общей для полей π_1 и π_2. Но они имеют общие точки только на прямой X. Следовательно, прямая a не может принадлежать полю π_1. Так как точки C_1 и C_2 совпадают визуально, но по принадлежностям к основным полям-различны, то они определяют вырожденную в точку прямую d.

Построение 2 (рис.3). На плоскости изображений прямая строится двумя точками, принадлежность которых к основным полям Π_1 и Π_2 определена. Только при таких условиях может быть она проектированием из центра S сопоставлена однозначно прямой пространства. Поэтому на каждой прямой должны быть указаны принадлежащие ей по крайней мере две точки. Например, на прямой b существуют две точки B_1 и B_2, а на прямой f – точки D_1 и D_2. Этими парами точек и отличаются они друг от друга хоть и изображены слившимися в одну прямую. Проектированием из центра S прямым b и f в пространстве соответствуют различные прямые b' и f'.

На плоскости изображений всегда могут быть взяты три точки не принадлежащие одной прямой. Например, (A_1, B_1, D_1), (A_2, B_2, D_2), (A_1, B_1, B_2), (A_1, A_2, B_1) и т.д. Но визуально расположенные на одной прямой три точки могут также не принадлежать одной прямой. Например, тройка точек (B_1, D_1, D_2) или (B_2, D_2, B_1) и т.д. не принадлежат одной прямой, так как проектированием из S соответствующие им в пространстве тройки (B_1', D_1', D_2') или (B_2', D_2', B_1') не расположены на одной прямой.

Построение 3 (рис.4). Любые три точки две A_1, B_1 поля Π_1 и одна C_2 поля Π_2, как бы ни были они расположены на плоскости чертежа, не могут принадлежать одной прямой, ибо поля Π_1 и Π_2 различны и имеют общие точки только на прямой X. Поэтому в любом случае они определяют единственную плоскость. В самом деле, в силу выполнимости построений I и 2 точки A_1 и B_1 определят единственную прямую a_1. Пусть прямая a_1 пересекает прямую X в точке P. Точки P и C_2 определяют прямую a_2 поля Π_2.

Полученные прямые a_1 и a_2, как принадлежащие полям π_1 и π_2 и пересекающиеся на прямой χ в точке P_{12}, определяют единственную плоскость α.

Визуально расположенные на одной прямой точки F_1, G_1, F_2, являясь точками различных полей, также определяют единственную вырожденную в прямую плоскость.

На каждой плоскости всегда существует по крайней мере одна точка плоскости P_{12}-пересечение прямых a_1 и a_2, определяющих плоскость на плоскости чертежа.

Построение 4. (рис.4). Пусть на плоскости чертежа прямыми b_1 и b_2 задана плоскость β. Построим прямую e определенную точками E_1, E_2, соответственно лежащими на прямых b_1 и b_2, определяющих плоскость. Нам уже известно, что перспективностями (I), в пространстве прямой $e(E_1, E_2)$ соответствует прямая $e'(E_1', E_2')$, принадлежащая плоскости α'. В силу этого можем заключить, что на плоскости чертежа прямая $e(E_1, E_2)$ также принадлежит плоскости α.

Построение 5. (рис.4). В этом построении мы рассмотрим случай, когда ни одна пара прямых (a_1, b_1) и (a_2, b_2), определяющих две плоскости α и β, не параллельны (случай параллельности указанных пар прямых будет рассмотрен ниже). Пусть прямые a_1 и b_1 пересекаются в некоторой точке D_1. Очевидно, точка D_1 принадлежит плоскостям α и β. Но точка D_2 -пересечение прямых a_2 и b_2 также будет принадлежать указанным плоскостям. Таким образом, существованию одной общей точки двух плоскостей сопутствует существование и второй общей точки. Этим и показывается выполнимость пятого построения.

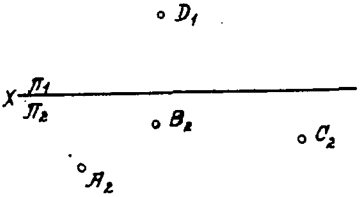


Рис.5

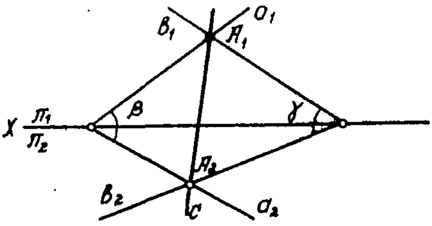


Рис.5-а

Построение 6(рис.5). Если на плоскости чертежа в плоском поле Π_2 выбрать три точки A_2, B_2, C_2 не принадлежащие одной прямой, то любая точка D_1 плоского поля Π_1 с точками A_2, B_2, C_2 составит четверку точек не принадлежащую одной плоскости. Допущение противного приведет к существованию общих точек полей Π_1 и Π_2 вне прямой X, что будет противоречить различности указанных полей.

При помощи перечисленных выше пространственных построений могут быть выполнены на плоскости чертежа очень важные для дальнейшего пространственные построения.

Построение прямой пересечения двух плоскостей. Возможность выполнения этого построения на плоскости чертежа следует из построений I,5 и 4.

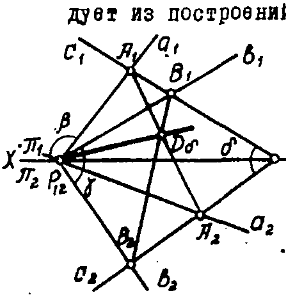


Рис.6

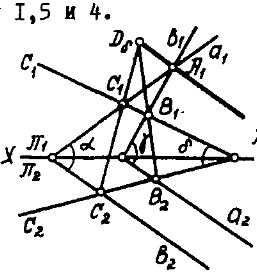


Рис. 7

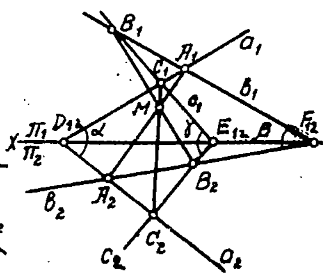


Рис.8

Построим прямую пересечения плоскостей $\beta(a_1, a_2)$ и $\gamma(b_1, b_2)$ (рис.5-а). Как было установлено, точки A_1 и A_2 являются общими для плоскостей $\beta(a_1, a_2)$ и $\gamma(b_1, b_2)$. Поэтому прямая c определенная точками A_1 и A_2 принадлежит обеим плоскостям и представляет собой их пересечение. Однако могут быть случаи, когда построение прямой пересечения двух плоскостей, в отличие случая, представленного на чертеже 5, требует дополнительных построений.

Например, при помощи основных прямых a_1, a_2 и b_1, b_2 (рис.6) определяющих плоскости β и γ, может быть построена только одна общая точка P_{12}. Для построения второй общей точки необходимо построить произвольную вспомогательную плоскость δ, пересекающую данные β и γ плоскости по прямым A_1A_2 и B_1B_2. Находясь в одной плоскости δ, прямые A_1A_2 и B_1B_2 в пересечении определят точку D_δ, очевидно, принадлежащую и плоскостям β и γ. Двумя общими точками P_{12} и D_δ этих плоскостей определяется искомая прямая $P_{12}D_\delta$.

Аналогичными построениями может быть построена прямая пересечения двух плоскостей α и γ (рис.7) с параллельными прямыми b_2 и a_2 на поле π_2. И в этом случае, имеется только одна общая точка A_1. Для построения второй общей точки прибегаем к вспомогательной плоскости δ. Находим прямые B_1B_2 и C_1C_2 пересечения последней с данными плоскостями γ и α. Точка пересечения D_δ прямых B_1B_2 и C_1C_2 будет второй общей точкой плоскостей γ и α. Поэтому прямая $D_\delta A_1$ будет искомой прямой пересечения.

2

<u>Построение общей точки трех плоскостей, не принадлежащих одной прямой</u>. Согласно предыдущим построениям плоскости α, β и γ (рис.8) не принадлежат одной прямой, так как их попарные пересечения-прямые $(A_1 A_2)$, $(B_1 B_2)$ и $(C_1 C_2)$ различны. Но с другой стороны, они соединяют вершины треугольников $A_1 B_1 C_1$ и $A_2 B_2 C_2$ удовлетворяющих условию теоремы Дезарга-пересечения сторон, т.е. точки D_{12}, E_{12} и F_{12} лежат на прямой X. Поэтому прямые $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ и $C_1 C_2$ пересекутся в одной точке M. Покажем принадлежность этой точки всем плоскостям α, β и γ. В самом деле, прямые пересечения $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ и $C_1 C_2$ принадлежат плоскостям α, β и γ. Следовательно, и точка их пересечения M также будет принадлежать указанным плоскостям.

<u>Построение точки пересечения плоскости и не принадлежащей ей прямой</u>. Зададим на плоскости чертежа (рис. 9) плоскость $\alpha(a_1, a_2)$ и прямую $A_1 A_2$, не лежащую в этой плоскости. Нам уже известно, что для этого точки A_1 и A_2, определяющие прямую $A_1 A_2$ (или по крайней мере одна из этих точек), не должны принадлежать соответственно прямым a_1 и a_2, определяющим плоскость α.

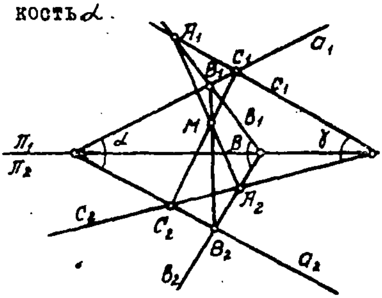


Рис. 9

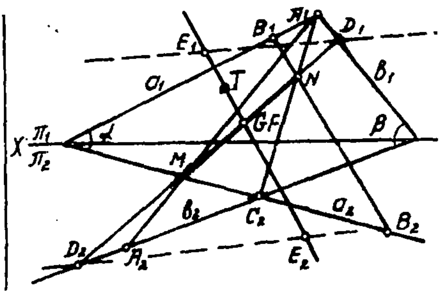


Рис. 10

Построим вспомогательную плоскость β, проходящую через прямую A_1A_2. Для этого прямые b_1 и b_2, пересекающиеся на прямой X, должны проходить соответственно через точки A_1 и A_2. Прямая пересечения B_1B_2 вспомогательной плоскости β с данной плоскостью α очевидно, пересечет прямую A_1A_2 в некоторой точке M, которая и будет искомой точкой пересечения данной плоскости с прямой A_1A_2. Действительно, точка M принадлежит прямой B_1B_2, лежащей в плоскости α. Следовательно, она принадлежит плоскости α. Но точка M принадлежит также и прямой A_1A_2, как точка пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2, лежащих в одной плоскости β. Однако, искомая точка M построена при помощи произвольно выбранной вспомогательной плоскости β. Необходимо показать, что точка M единственна и ее местонахождение на плоскости чертежа не зависит от вспомогательной плоскости β.

В этом можно убедиться построениями непосредственно на плоскости чертежа. Если через прямую A_1A_2 провести другую вспомогательную плоскость γ, то в силу показанного на рис.8 построения три плоскости α, β и γ определят единственную точку M. То же самое можно заключить и основываясь на однозначности соответствия чертежа и проектируемого пространства, устанавливаемого проектированием. Плоскости α и прямой A_1A_2 в пространстве однозначно соответствуют плоскость α' и прямая $A_1'A_2'$. Существует единственная точка M, общая для α' и прямой $A_1'A_2'$, проекцией которой на плоскости чертежа является точка M. Допущение существования на чертеже второй точки пересечения, полученной при помощи второй вспомогательной плоскости γ приведет к противоречивому заключению в пространстве- пересечению плоскости и не принадлежащей ей прямой в двух точках.

Теперь уже можно показать выполнимость основных построений I–6 для точек прямых и плоскостей заданных на плоскости чертежа не обязательно элементами основных полей Π_1 и Π_2, как это делалось до сих пор.

Пусть, например, скрещивающимися прямыми A_1A_2 и B_1B_2 на плоскости чертежа определены (рис.10) две точки M и N. Следует убедиться в единственности прямой MN определенной этими точками. Тройке точек B_1, A_1 и B_2 принадлежит единственная плоскость α, определенная парой прямых a_1 и a_2 на основных полях Π_1 и Π_2. Прямая A_1N лежит в этой плоскости и потому пересекает поле Π_2 в точке C_2. Три точки A_1 и A_2, C_2 также определяют единственную плоскость $\beta(B_1, B_2)$, которой принадлежат точки M и N, а следовательно и определенная ими прямая MN. Пересечением прямой MN с прямыми B_1 и B_2 определится единственная пара точек D_1 и D_2 принадлежащих соответственно основным полям Π_1 и Π_2. Таким образом мы убеждаемся, что для любой пары точек, не принадлежащих основным полям, можно построить единственную принадлежащую им прямую / выполнимость 1-го основного построения/. На прямой MN существуют по крайней мере две точки M и N. Существуют три точки M, N и T не принадлежащие одной прямой / выполнимость 2 основного построения/. Заметим, что точка F прямой E_1E_2 визуально хоть и лежит на прямой MN, но тем не менее с точками M и N образует тройку точек не принадлежащую одной прямой. В самом деле, прямые E_1D_1 и E_2D_2 скрещиваются, так как пересекают прямую X в разных точках. Поэтому прямые D_1D_2 и E_1E_2 на чертеже образуют две слившиеся в одну, но различные точки G и F. Прямая FM отлична от MN. В этом легко можно убедиться, если построить точки встречи прямой с основными полями Π_1 и Π_2. Они будут отличными от пары D_1, D_2, принадлежащей прямой MN.

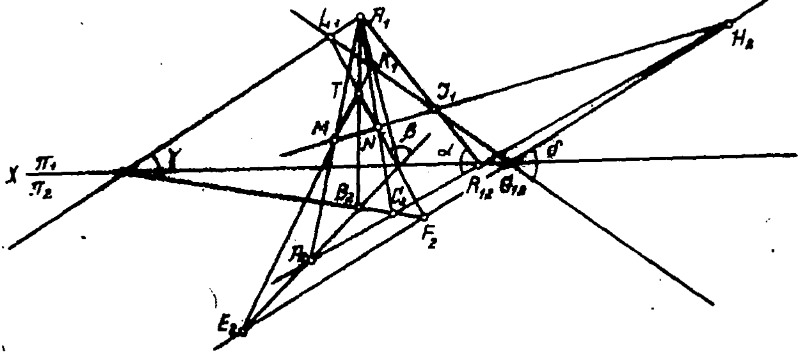


рис.II

При помощи прямых (A_1A_2), (A_1B_2) и (A_1C_2) зададим три точки M T и N, не лежащие на одной прямой (рис.II). Ни одна из этих точек не может принадлежать какому либо из полей Π_1 и Π_2. Такое допущение на основании основного построения 4 приведет к противоречивому выводу о совпадении какой либо из прямых (A_1A_2), (A_1B_2), (A_1C_2) с одним из основных полей. На чертеже IO, выше было показано, что отрезки MT, MN и NT определяют прямые встречающие основные поля Π_1 и Π_2 в единственных парах точек. Для построения такой пары точек отрезка MN, через три точки A_1, C_1, A_2 проведена вспомогательная плоскость α. Так как отрезок MN лежит в плоскости α, то определенная им прямая в пересечении с прямыми (A_1R_{12}) и (A_2R_{12}) определит точки J_1 и H_2 принадлежащие основным полям Π_1 и Π_2. Аналогично для отрезков MT и NT при помощи вспомогательных плоскостей β и γ могут быть построены K_1, E_2 и L_1, F_2. Треугольники MTN и $A_2B_2C_2$ удовлетворяют требованиям теоремы Дезарга - прямые, соединяющие вершины, проходят через точку A_1. Поэтому пересечения соответственных сторон-точки E_2, F_2 и H_2 лежат на одной прямой, принадлежащей полю Π_2 и пересекающей прямую X в некоторой точке G_{12}. Но, точки L_1, K_1, J_1 и G_{12}, обратным проектированием в пространстве соответствуют точкам L_1', K_1', J_1' и G_{12}', являющимся общими для плоскости Π_1' и плоскости δ', определенной тремя точками M', N' и T_1' соответствующими однозначно на чертеже точкам M, T и N.

Следовательно точки L_1', K_1', J_1' и G_{12}' лежат на одной прямой. В силу этого точки L_1, K_1, J_1 и G_{12} также будут лежать на одной прямой. Таким образом, прямые основных полей $L_1 G_{12}$ и $E_2 G_{12}$ на плоскости чертежа определяют единственную плоскость δ, принадлежащую трем точкам M, N и T. (Выполнимость основного построения 3). Выполнимость основного построения 4 очевидна.

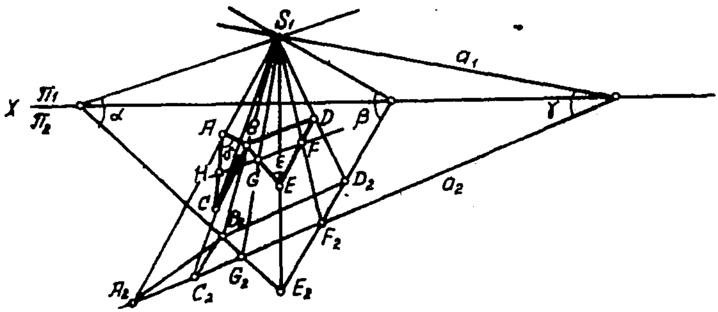


Рис. 12

Пусть на чертеже прямыми S_1A_2, S_1B_2, S_1C_2, S_1D_2 и S_1E_2 (рис. 12) заданы две тройки точек ABC и BDE; каждая из них не принадлежащая одной прямой. Тогда, как было показано выше, этими тройками точек определяются единственные две плоскости $\delta(A,B,C)$ и $\varepsilon(B,D,E)$. Точка B очевидно принадлежит обеим плоскостям. Покажем, что в таком случае для указанных плоскостей всегда можно построить еще одну общую точку.

Построим плоскость γ, проходящую через точки A_2, C_2 и S_1. Плоскость γ проходит и через прямую AC пересекая плоскости α и β, содержащие в себе прямые BE и DE, по прямым S_1G_2 и S_1F_2. Поэтому прямые S_1G_2 и S_1F_2 пересекаются с прямыми BE и DE в точках G и F, лежащих в плоскости γ и определяющих прямую GF, лежащую в этой же плоскости. Но, как было указано выше, прямая AC также принадлежит плоскости γ. Следовательно, прямые AC и GF, как лежащие в одной плоскости, в пересечении определят некоторую точку H общую для плоскостей δ и ε. В самом деле это явствует из того, что прямые AC и GF, пересечением которых является точка H, по построению принадлежат плоскостям δ и ε.

Таким образом мы убеждаемся в выполнимости основного построения 5 для плоскостей, определенных тройками точек, не принадлежащими основным полям Π_1 и Π_2.

Выполнимость основного построения 6 может быть показана легко (рис.12). Точка A не принадлежит плоскости ε, так как она не лежит на прямой HB, являющейся общей для плоскостей δ и ε. Поэтому четыре точки A, B, D, E не принадлежат одной плоскости.

§ 3. Параллельность прямых и плоскостей

В этом параграфе мы рассмотрим основные пространственные построения на параллельность прямых и плоскостей. Как мы уже знаем, позиционные пространственные построения на плоскости чертежа выполняются совершенно одними и теми же способами, независимо от того, каким проектированием получен чертеж- параллельным или центральным.

Иначе обстоит дело при выполнении построений на параллельность прямых и плоскостей. Здесь уже с точки зрения графических построений существенное значение имеет каким проектированием получен чертеж. Это следует из известных свойств параллельного и центрального проектирований. Если при параллельном проектировании параллельные между собой прямые на плоскость чертежа проектируются также в параллельные прямые, то при центральном проектировании они проектируются всегда пересекающимися, за исключением случая, когда проектируемые параллельные прямые параллельны также и плоскости проекций.

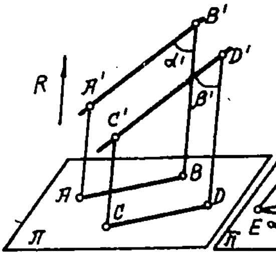


Рис.13

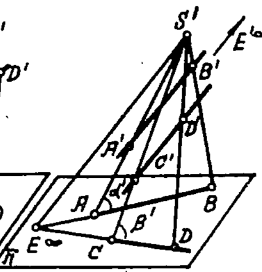


Рис.14

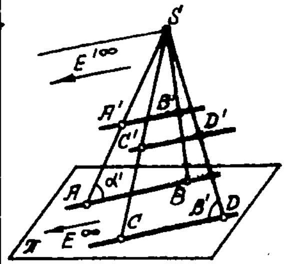


Рис.15

Пусть параллельные прямые $A'B'$ и $C'D'$ спроектированы на плоскость проекций π по направлению R (рис.13). В таком случае проектирующие плоскости α' и β' параллельны и в пересечении с плоскостью π определяют параллельные прямые AB и CD, являющиеся проекциями прямых $A'B'$ и $C'D'$.

Если же параллельные прямые $A'B'$ и $C'D'$ (рис.14) спроектированы из центра S', то тогда проектирующие плоскости α' и β', имея общую прямую $S'E'^{\infty}$, параллельную прямым $A'B'$ и $C'D'$, пересекут плоскость π по прямым AB и CD, пересекающимися в точке E^{∞}. Таким образом, параллельные прямые $A'B'$ и $C'D'$ из центра S' проектируются в пересекающиеся в точке E^{∞} прямые AB и CD. Точка E^{∞}, очевидно, представляет собой проекцию несобственной точки E'^{∞}, в которой пересекаются прямые $A'B'$ и $C'D'$. Поэтому ее называют точкой схода прямых AB и CD или просто несобственной точкой, хотя она и обыкновенная собственная точка плоскости чертежа π.

В случае, когда проектируемые параллельные прямые $A'B'$ и $C'D'$ (рис.15) параллельны так же и плоскости Π, прямая пересечения $S'E'^{\infty}$ окажется параллельной плоскости Π. Следовательно, проектирующие плоскости α' и β' в пересечении с плоскостью чертежа определят взаимно параллельные проекции AB и CD. Точка схода E^{∞} этих прямых будет фактически несобственной точкой плоскости чертежа.

В соответствии с указанными выше соображениями мы можем определить на плоскости чертежа несобственную плоскость, которой будут принадлежать изображения всех несобственных точек трехмерного пространства.

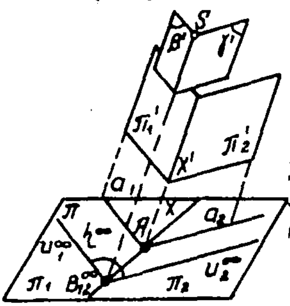


Рис.16

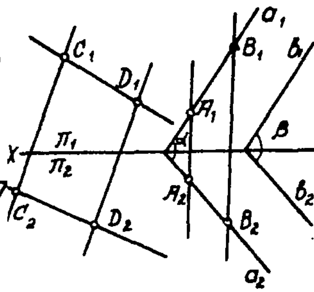


Рис.17

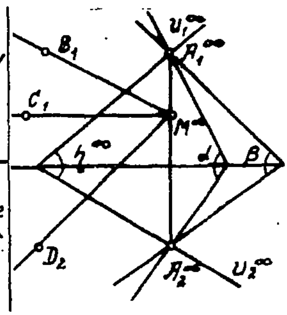


Рис.18

Спроектируем основные поля Π_1' и Π_2' на плоскость проекций Π из центра S (рис.16). Мы уже знаем, что каждая плоскость однозначно определяется в пространстве двумя прямыми, принадлежащими основным полям Π_1 и Π_2 и обязательно пересекающимися на прямой X. Через центр проектирования S проведем плоскости β' и γ', параллельные соответственно основным полям Π_1' и Π_2'. Обратимся к прямым пересечения плоскостей β' и γ' с плоскостью чертежа Π. Прямые эти u_1^{∞} и u_2^{∞}, очевидно, пересекутся на прямой X в некоторой точке B_{12}^{∞}. Какой же плоскости в пространстве соответствует плоскость η^{∞}, изображенная на плоскости чертежа прямыми v_1^{∞} и v_2^{∞}? По построению, плоскости β' и γ', пересекающие плоскость чертежа π по прямым v_1^{∞} и v_2^{∞}, проектируют несобственные прямые $v_1'^{\infty}$ и $v_2'^{\infty}$ основных полей π_1' и π_2'. Поэтому плоскость $\eta^{\infty}(v_1^{\infty}, v_2^{\infty})$ в пространстве соответствует несобственной плоскости η'^{∞}, определенной по отношению к основным полям π_1' и π_2' прямыми $v_1'^{\infty}$ и $v_2'^{\infty}$. Следовательно, на плоскости чертежа, полученного центральным проектированием, одна из плоскостей несобственная, т.е. соответствует несобственной плоскости пространства. В связи с этим параллельность прямых и плоскостей на таком чертеже определяется их отношением к несобственной плоскости. Прямые и плоскости параллельны, если они пересекаются на несобственной плоскости чертежа.

Если основные поля (рис.17) π_1 и π_2 получены параллельным проектированием, то прямые A_1A_2 и B_1B_2 в пространстве соответствуют параллельным прямым. Действительно, A_1A_2 на чертеже параллельна B_1B_2, кроме того, обе лежат в одной α плоскости. Последнее условие должно быть обязательно выполнено, так как одна лишь параллельность на чертеже недостаточна. Например, на чертеже прямые C_1C_2 и D_1D_2, хотя и параллельны, но изображают скрещивающиеся прямые, так как C_1D_1 и C_2D_2 не пересекаются на прямой X. Плоскости α и β параллельны, что легко устанавливается на чертеже параллельностью прямых $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$, определяющих эти плоскости. Обратным параллельным проектированием прямым $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$ в пространстве на основных полях π_1' и π_2' будут соответствовать также параллельные прямые $a_1' \parallel b_1'$ и $a_2' \parallel b_2'$, определяющие параллельные плоскости α' и β', изображениями которых являются на чертеже плоскости α и β.

В силу свойств центрального проектирования, отмеченных выше, чертеж, изображающий параллельные прямые и плоскости, будет отличен от чертежа, полученного параллельным проектированием. Как мы уже выяснили, в этом случае на чертеже (рис.18) одна из плоскостей $\eta^{\infty}(v_1^{\infty}, v_2^{\infty})$ соответствует в пространстве несобственной плоскости.

Прямые B_1M^{∞}, C_1M^{∞} и D_2M^{∞} пересекаются в точке M_1^{∞} лежащей на несобственной плоскости η^{∞}. Поэтому они являются проекциями параллельных в пространстве прямых $B_1'M'^{\infty}$, $C_1'M'^{\infty}$ и $D_2'M'^{\infty}$, пересекающихся в несобственной точке M'^{∞}, соответствующей на чертеже M^{∞}.

Плоскости α и β представляют собой центральные проекции параллельных плоскостей в пространстве α' и β'. На чертеже это усматривается пересечением плоскостей α и β на плоскости η^{∞} по прямой $A_1^{\infty}A_2^{\infty}$.

Основываясь на вышеизложенном, на чертеже возможно выполнить следующие пространственные построения на параллельность прямых и плоскостей.

<u>Построение прямой, проходящей через данную точку, и параллельной данной прямой.</u>

В дальнейшем для краткости, как это принято в начертательной геометрии, чертежи, полученные параллельным или центральным проектированием, будем соответственно называть просто параллельным или центральным чертежами. Прямую X принято также называть осью чертежа или проекций.

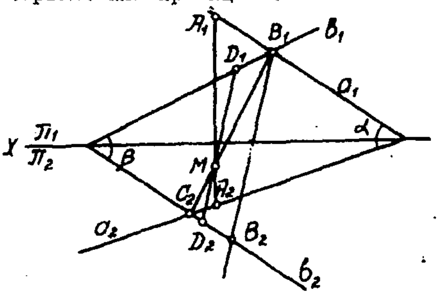


Рис.19

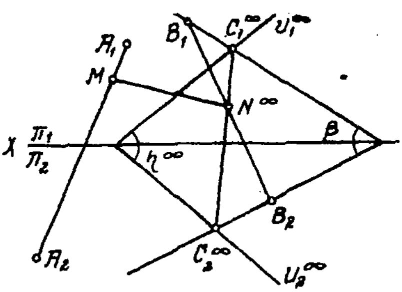


Рис.20

На параллельном чертеже (рис.I9) дана точка $M(A_1, A_2)$, через нее следует провести прямую, параллельную данной прямой $B_1 B_2$. Искомая прямая должна лежать в единственной плоскости, определенной точкой $M(A_1 A_2)$ и прямой $B_1 B_2$. Указанная плоскость может быть построена при помощи вспомогательной плоскости $\alpha(a_1 a_2)$, проходящей через три точки A_1, B_1, A_2. Прямая $B_1 M$ лежит в плоскости α и встречает поле Π_2 в точке C_2 на прямой a_2. Плоскость $\beta(b_1, b_2)$ построена тремя точками B_2, C_2 и B_1 с прямыми на основных полях b_1 и b_2. Теперь искомая прямая строится проведением через точку M параллели данной прямой $B_1 B_2$ и определяется точками D_1 и D_2, лежащими на прямых b_1 и b_2.

Решение этой же задачи на центральном чертеже (рис.20) сводится к построению несобственной точки N^∞ данной прямой $B_1 B_2$. Для этого следует построить точку встречи прямой $B_1 B_2$ с несобственной плоскостью γ^∞. Нам уже известно, что эта задача решается при помощи вспомогательной плоскости β, проходящей через прямую $B_1 B_2$ и пересекающей плоскость γ^∞ по прямой $C_1^\infty C_2^\infty$. Искомая прямая будет MN^∞. В самом деле, она проходит через данную точку M и параллельна прямой $B_1 B_2$, так как пересекает ее в несобственной точке N^∞.

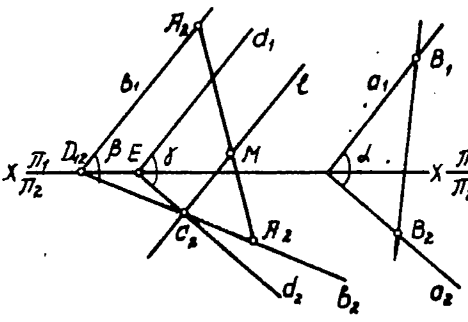


Рис.2I

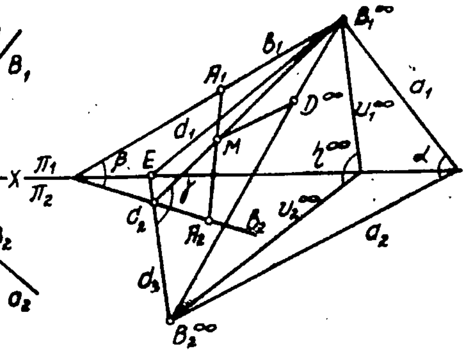


Рис.22

<u>Построение прямой проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.</u> На параллельном чертеже (рис.21) заданы точка $M(A_1A_2)$ и плоскость $\alpha(a_1,a_2)$. Построим искомую прямую. Для того чтобы прямая, проходящая через точку $M(A_1A_2)$ была параллельна плоскости $\alpha(a_1a_2)$, она должна быть параллельной какой-либо прямой на этой плоскости. Следовательно, надо построить произвольную прямую B_1B_2, лежащую в плоскости $\alpha(a_1,a_2)$, и через точку $M(A_1A_2)$ провести прямую параллельно B_1B_2, которая и будет искомой.

Таким образом, наша задача сводится к предыдущей. Но целесообразно вместо прямой B_1B_2 воспользоваться прямой a_1 или a_2 плоскости α, так как они уже имеются на плоскости чертежа.

Построим прямую b_1 параллельно a_1 и ее точку встречи D_{12} с осью X соединим прямой b_2 с точкой A_2. Прямые b_1 и b_2 определяют некоторую плоскость β, проходящую через точку M. Теперь построим прямую MC_2, параллельную прямой a_1. Прямая MC_2 будет искомой. Она проходит через точку M и параллельна плоскости α, так как параллельна прямой a_1 этой плоскости.

Решим теперь такую же задачу на центральном чертеже. Через точку $M(A_1A_2)$ (рис. 22) проведем прямую, параллельную плоскости $\alpha(a_1,a_2)$. Необходимые построения в случае центральной проекции проще в сравнении с построениями на параллельном чертеже. Точка $M(A_1A_2)$ с произвольной точкой D^{∞} на несобственной прямой $B_1^{\infty}B_2^{\infty}$ плоскости $\alpha(a_1,a_2)$ определит искомую прямую MD^{∞}.

И здесь лучше воспользоваться уже имеющейся несобственной точкой B_1^∞ или B_2^∞. Прямая MB_1^∞ также параллельна данной плоскости $\alpha(a_1,a_2)$. Пересечение C_2 прямой MB_1^∞ с основной плоскостью Π_2 строится при помощи плоскости $\beta(b_1,b_2)$. Построение точек пересечения прямой MD^∞ с основными полями Π_1 и Π_2 сравнительно сложно

Построение плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости. На чертеже плоскости, проходящие через точку, строятся проведением последних через прямые, при помощи которых определяется точка. Поэтому поставленную задачу следует решить в такой последовательности: сначала через заданную точку провести прямую, параллельную данной плоскости, а затем через эту прямую- искомую плоскость.

Например, пусть точка M задана при помощи прямой A_1A_2 (рис.21), вообще не параллельной заданной плоскости $\alpha(a_1,a_2)$. Строится прямая MC_2, параллельная плоскости $\alpha(a_1,a_2)$, т.е. решается предыдущая задача. Так как прямая MC_2 параллельна плоскости $\alpha(a_1,a_2)$, то через нее уже возможно провести искомую плоскость. Прямую d_2 проводим параллельно прямой a_2 -а d_1- параллельно a_1. Определенная этим прямыми плоскость γ искомая. В самом деле, она параллельна данной плоскости, так как $d_1 \parallel a_1$ и $d_2 \parallel a_2$ и принадлежит прямой C_2M.

Аналогично решается задача и в центральной проекции (рис.22). Через точку M, заданную при помощи прямой A_1A_2 построением, описанным в предыдущей задаче, проводим прямую $B_1^\infty C_2$, параллельную данной плоскости $\alpha(a_1,a_2)$. Плоскость $\gamma(d_1,d_2)$, принадлежащая трем точкам $B_1^\infty, C_2, B_2^\infty$, искомая. Она содержит точку M , так как прямая $B_1^\infty C_2$ лежит в этой плоскости и параллельна плоскости данной. в силу пересечения плоскостей $\gamma(d_1 d_2)$ и $\alpha(a_1, a_2)$ по несобственной прямой $B_1^\infty B_2^\infty$.

Основываясь на решениях вышеуказанных трех задач (в параллельной, так же как центральной проекциях) на параллельность прямых и плоскостей в плоскости чертежа можно решить любую пространственную задачу.

§ 4. Выполнимость метрических построений

Общий проективный взгляд на метрику евклидового пространства дает возможность метрические построения на плоскости чертежа свести к пространственным позиционным построениям, изложенным в § 2. Как известно, с проективной точки зрения все метрические построения на плоскости определяются заданием эллиптической инволюции на несобственной прямой, называемой абсо- абсолютной инволюцией или просто абсолютом плоскости. Совокупность несобственных прямых всех плоскостей и несобственных точек, перпендикулярных к плоскостям прямых, находятся в полярной связи на несобственной плоскости пространства. Полярность эта называется абсолютным поляритетом или просто абсолютом пространства. Так как все абсолютные инволюции эллиптические, т.е. двойные точки все мнимые, то абсолютная полярность не может иметь инцидентных соответственных элементов. Поляра и полюс абсолютной полярности не могут совпадать. Но совпадение в полярности на плоскости вообще происходит на фундаментальной кривой. Следовательно, фундаментальная кривая абсолютной полярности непременно мнимая.

Докажем, что фундаментальная кривая абсолютной полярности представляет собой мнимую окружность. Доказательство основывается на простом свойстве окружности, отличающем ее от других кривых второго порядка. Все сопряженные диаметры всех окружностей, в том числе и мнимой, перпендикулярны.

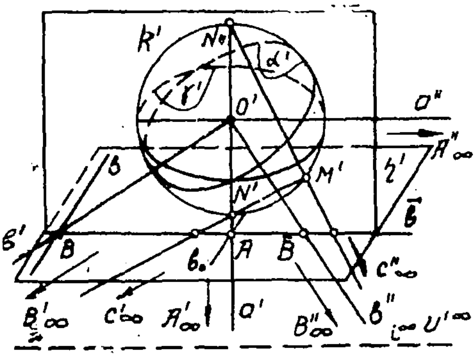


Рис.23

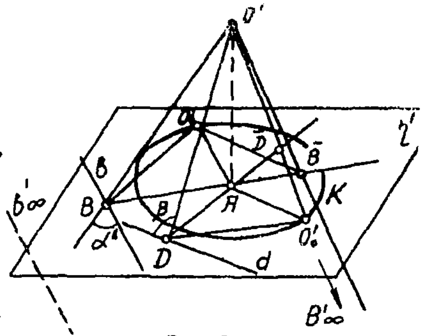


Рис.24

На произвольной плоскости β' (рис.23) пространства из ее произвольной точки O' спроектируем абсолют этой плоскости. В результате очевидно, получим ортогональный пучок прямых с центром в точке O' и с сопряженными прямыми $a' \perp a''$, $b' \perp b''$... и т.д., определяющими эллиптическую инволюцию пучка. Если теперь, из точек N' и N'' прямой a', равно отстоящих от точки O', спроектировать все сопряженные точки абсолютной инволюции, как например, точки C'_∞ и C''_∞, то пересечения соответственных лучей ($C'_\infty N' \times C''_\infty N'' \equiv M'$) образуют окружность K'. Окружность K' пересекает несобственную прямую U'_∞ плоскости β' в циклических точках абсолютной инволюции i^∞. Вращением окружности K' вокруг диаметра $N'N''$ образуется шаровая поверхность R' с центром O'. Плоскости больших окружностей и сопряженные с ними диаметральные прямые, как например, $\alpha' \perp b''$, будут проектировать абсолютную полярность несобственной плоскости ε'^∞ трехмерного пространства. Мнимая кривая, описанная циклическими точками абсолютной инволюции i^{∞} при вращении окружности K' вокруг прямой $N'N''$ является пересечением шаровой поверхности R' с несобственной плоскостью $\mathcal{E}^{\infty}$ и поэтому представляет собой мнимую окружность K'_{∞}. Но эта окружность состоит из циклических точек абсолютных инволюций на несобственных прямых, полученных вращением прямой u'_{∞} вокруг точки A'_{∞}. Отсюда следует, что поряды циклических точек будут касаться окружности K'_{∞}. Следовательно, окружность K'_{∞} явится фундаментальной кривой абсолютной полярности. Таким образом шаровая поверхность R' и абсолютная полярность (обозначим ее через Π'_{∞}) находятся во взаимно определяющей связи. Абсолютная полярность Π'_{∞} определяет шаровую поверхность R' и, наоборот, заданием шаровой поверхности R' задается и абсолютная пс полярность Π'_{∞}.

Проведем произвольную плоскость ℓ', перпендикулярную прямой a' (рис. 23) и пересекающую ее в некоторой точке A. Полярная связка (O') в пересечении с плоскостью $\mathcal{E}'$ определяет полярность Π, являющуюся проекцией абсолютной полярности Π'_{∞}. Покажем, что фундаментальная кривая полярности Π также мнимая окружность. Действительно, точка A соответствует несобственной прямой a'_{∞} плоскости ℓ' и представляет собой центр поляритета Π, а проходящая через него прямая $\bar{b}$ - диаметр, на котором разделяющая пара $B \,\overline{\wedge}\, \bar{B}$, $A \,\overline{\wedge}\, A'_{\infty}$ определяет эллиптическую инволюцию. Ввиду перпендикулярности прямой b к диаметру $\bar{b}$, сопряженный с ним диаметр b_0 образует прямой угол $\measuredangle \bar{b} b_0$. Применяя аналогичные рассуждения к любому диаметру, можно заключить, что все сопряженные пары диаметров поляритета Π перпендикулярны, и следовательно его фундаментальная кривая мнимая окружность.

Рассмотренная связь полярности Π с абсолютной полярностью Π'_∞ дает возможность построению соответственных элементов полярной связки (O') свести к построению соответственных элементов поляритета Π.

Пусть ε' произвольная плоскость пространства, а точка O' центр полярной связки (рис.24). Из O' на плоскость ε' опускаем перпендикуляр $O'A$. В плоскости ε' построим окружность K с центром A и радиусом, равным отрезку $O'A$. Этих данных достаточно для построения соответственных элементов поляритета Π. Построим например, точку, соответственную прямой b. Из центра A на прямую b опускаем перпендикуляр AB. Затем восставляем перпендикуляр к прямой AB из точки A до встречи с окружностью K в точке O'_0. Проводим прямую O'_0B и восставляем перпендикуляр к O'_0B из точки O'_0 до встречи с прямой AB в точке $\bar{B}$, которая и будет искомым полюсом поляры b. Очевидно прямоугольный треугольник $BO'_0\bar{B}$ равен треугольнику $BO'\bar{B}$. Поэтому плоскость α', определенная полярой b и центром полярной связки O', перпендикулярна к прямой $O'\bar{B}$. Они соответственны в полярности связки (O') и проектируют соответственные элементы поляру b'^∞ и полюс B'^∞ абсолютного поляритета Π'^∞. Аналогично при помощи прямоугольного треугольника $DO'_0\bar{D}$ равного треугольнику $DO'\bar{D}$ строим полюс $\bar{D}$, соответственный поляре d. Полюс $\bar{D}$ и поляра d определяют плоскость β и прямую $O'\bar{D}$, соответственные в полярности связи (O'). Так могут быть построены все соответственные элементы этой связки.

После указанных особенностей абсолютного поляритета Π'^∞ и его изображения Π, можем приступить к выполнению метрических построений на параллельном и центральном изображениях. Разумеется, достаточно показать выполнимость только лишь основных матрических построений аксиоматического характера, из которых следует выполнимость всех остальных.

I. Из любой точки может быть опущен перпендикуляр на данную плоскость.

2. Из любой точки может быть опущен перпендикуляр на данную прямую.

3. Вокруг каждой точки может быть описана окружность данного радиуса.

4. От любой точки данной прямой может быть отложен отрезок, равный данному отрезку.

5. От любой прямой может быть отложен угол, равный данному углу.

Покажем сперва выполнимость этих построений на параллельном чертеже. Как мы уже убедились выше, задание абсолютной полярности равносильно заданию полярной связки проектирующей эту полярность. Теперь покажем ,что для изображения указанной связи необходимо иметь на чертеже изображение произвольного тетраэдра с измерен ными в пространстве ребрами.

Пусть на параллельном чертеже /рис.25/ длины ребер тетраэдра $A_1B_{12}C_{12}D_2$ заданы. При помощи этих длин построим развертку

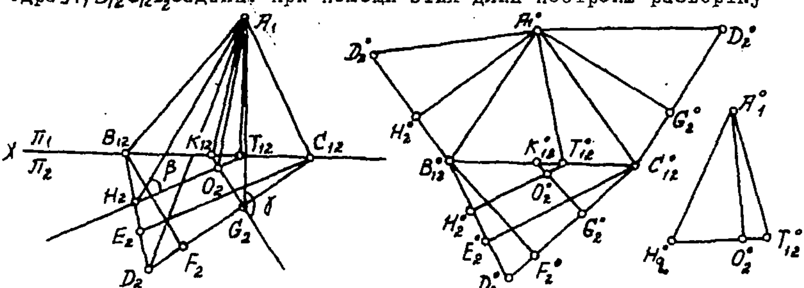


Рис. 25

данного тетраедра $A_1^oD_2^oC_{12}^oD_2^oB_{12}^oD_2^o$. Аффинным соответствием B_{12}, $C_{12}, D_2 \overset{аф}{\barwedge} B_{12}^o, C_{12}^o, D_2^o$ построим изображения $C_{12}E_2$ и $B_{12}F_2$ перпендикуляров $C_{12}^oE_2^o$ и $B_{12}^oF_2^o$, опущенных из вершин C_{12}^o и B_{12}^o на противоположные стороны треугольника $B_{12}^oC_{12}^oD_2^o$. Аналогично аффинными соответствиями $A_1, B_{12}, D_2 \overset{аф}{\barwedge} A_1^o, B_{12}^o, D_2^o$ и $A_1, C_{12}, D_2 \overset{аф}{\barwedge} A_1^o, C_{12}^o, D_2^o$ могут быть построены изображения A_1H_2 и A_1G_2 перпендикуляров $A_1^oH_2^o$ и $A_1^oG_2^o$ опущенных из вершины A_1^o на стороны $D_2^oB_{12}^o$ и $D_2^oC_{12}^o$. Теперь легко построить изображения плоскостей β и γ, соответствующих в пространстве плоскостям β' и γ', перпендикулярных к ребрам $B_{12}'D_2'$ и $D_2'C_{12}'$ и проходящих через вершину A'. Для этого через точки H_2 и G_2 следует провести прямые H_2T_{12} и G_2K_{12} параллельно перпендикулярам $C_{12}E_2$ и $B_{12}F_2$. Плоскости β и γ определяются на чертеже треугольниками $H_2A_1T_{12}$ и $G_2K_{12}A_1$. Пересечение плоскостей β и γ, прямая A_1O_2 представляет собой изображение перпендикуляра, опущенного из точки A_1' на плоскость π_2'. Длина же указанного перпендикуляра определяется высотой $A_1^oO_2^o$ треугольника $H_2^oA_1^oT_{12}^o$ построенного отрезками $A_1^oH_2^o, H_2^oT_{12}^o$ и $A_1^oT_{12}^o$ имеющимися на развертке. Имея на чертеже изображение перпендикуляра $A_1'O_2'$ и его длину, $A_1^oO_2^o$ можно показать выполнимость перечисленных выше основных метрических построений.

Прежде всего построим полярную связку, проектирующую абсолютную полярность. Пусть на чертеже (рис.26) построениями,

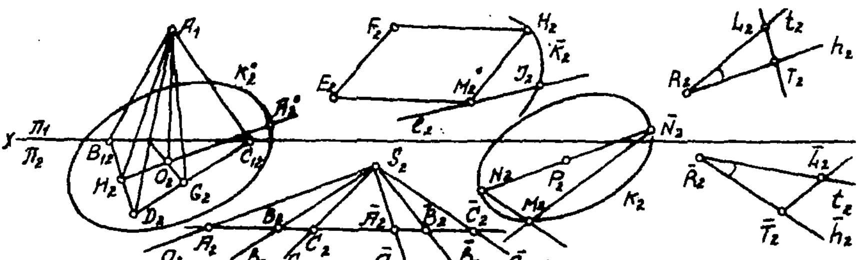


Рис.26

выполненными на рис.25, из точки A_1 опущен на плоскость Π_2 перпендикуляр A_1O_2 и его длина-отрезок $O_2A_1^0$ отложен по прямой H_2O_2. Направлениями уже построенных высот треугольника $B_{12}D_2C_{12}$ через любую точку S_2 плоскости Π_2 можно провести две пары сопряженных направлений $a_2, \bar{a}_2$ и $b_2, \bar{b}_2$, которые, как изображения взаимно перпендикулярных прямых, будут разделяющими парами и в пересечении с произвольной прямой образуют эллиптическую инволюцию точек $A_2 \pi \bar{A}_2$ и $B_2 \pi \bar{B}_2$. Любой паре точек этой инволюции, например, $C_2 \pi \bar{C}_2$, в пучке (S_2) соответствует новая пара сопряженных направлений $C_2 \pi \bar{C}_2$.

При помощи пучка (S_2) сопряженных направлений могут быть выполнены все основные метрические построения в плоскости.

<u>Построение 2.</u> <u>Из точек $\bar{N}_2$ опустить перпендикуляр на прямую N_2M_2.</u> В пучке прямых (S_2) построим прямую $\bar{C}_2$, параллельную прямой N_2M_2. Затем определим прямую C_2 инволюционную $\bar{C}_2$, и через точку $\bar{N}_2$ проведем прямую $\bar{N}_2M_2$, параллельную C_2, которая и будет искомым перпендикуляром.

<u>Построение 3.</u> <u>Вокруг точки P_2 описать окружность радиусом P_2N_2.</u> Отложим отрезок $P_2\bar{N}_2$, противоположный и равный отрезку P_2N_2, через N_2 проведем произвольную прямую N_2M_2 и из $\bar{N}_2$ опустим перпендикуляр $\bar{N}_2M_2$ (построения 2). Треугольник $N_2M_2\bar{N}_2$ прямоугольный, с прямым углом при вершине M_2. Так может быть построено любое количество прямоугольных треугольников с общей гипотенузой $N_2\bar{N}_2$. Вершины с прямыми углами этих треугольников образуют эллипс K_2, соответствующий в пространстве окружности K_2' в плоскости Π_2'. Поэтому на чертеже эллипс K_2 будет "окружностью" плоскости Π_2 радиусом, равным данному отрезку P_2N_2.

<u>Построение 4. Дан отрезок E_2F_2; следует отложить его по прямой ℓ_2 от точки M_2^0.</u> Если по трем точкам $M_2^0E_2F$ построить параллелограмм $M_2^0E_2F_2H_2^0$, то отрезок $M_2^0H_2^0$ будет равен отрезку E_2F_2. Теперь из точки M_2^0 опишем дугу $\bar{K}_2$ радиусом $M_2^0H_2^0$ (построение 3). Пересечение дуги $\bar{K}_2$ с прямой ℓ_2 определяет точку J_2. Отрезок $M_2^0J_2$ будет искомым.

<u>Построение 5. Данный угол $\measuredangle t_2h_2$ отложить в какую-либо сторону от луча $\bar{h}_2$.</u> Из точки L_2 луча t_2 опустим на луч h_2 перпендикуляр L_2T_2 (построение 2). Треугольник $R_2T_2L_2$ прямоугольный, с прямым углом при вершине T_2. На луче $\bar{h}_2$ от точки $\bar{R}_2$ отложим отрезок $\bar{R}_2\bar{T}_2$, равный отрезку R_2T_2 (4 построение). Затем из точки $\bar{T}_2$ восставим перпендикуляр (построение 2) и на нем отложим отрезок $\bar{T}_2\bar{L}_2$, равный отрезку T_2L_2 (построение 4). Построенные прямоугольные треугольники $R_2L_2T_2$ и $\bar{R}_2\bar{L}_2\bar{T}_2$, очевидно, равны и поэтому угол $\measuredangle h_2t_2$ равен искомому углу $\measuredangle \bar{h}_2\bar{t}_2$.

Основываясь на возможности построения в плоскости Π_2 окружности любого радиуса, из центра O_2 радиусом $O_2A_2^0$, равным перпендикуляру A_1O_2, мы можем описать окружность K_2^0, которая согласно рис. 24, вместе с точкой A_1 определяет полярную связку (A), проектирующую абсолютную полярность.

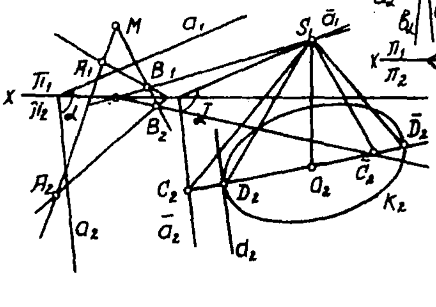


Рис.27

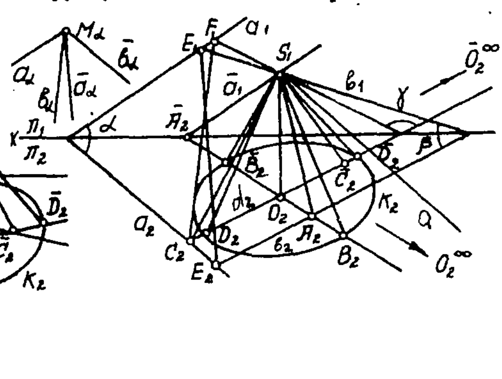


Рис.28

Теперь уже можно показать выполнимость первого основного метрического построения перпендикулярных прямой и плоскости

Построение I. На параллельном чертеже (рис.27) точкой S_1 и окружностью K_2 задана полярная связка (S_1). Из данной произвольной точки $M(A_1, A_2)$ надо опустить перпендикуляр на плоскость $\alpha(a_1, a_2)$.

Через точку S_1 проведем плоскость $\bar{\alpha}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, параллельную плоскости $\alpha(a_1, a_2)$. Точка касания D_2 (касательной d_2 к окружности K_2 и параллельной прямой $\bar{a}_2$) и центр O_2 определяют прямую D_2O_2, сопряженную с направлением $\bar{a}_2$. В инволюции на прямой D_2O_2, определенной двумя парами точек $D_2 \pi \bar{D}_2$ и $O_2 \pi O_2^{\infty}$ точки C_2 будет соответствовать полюс $\bar{C}_2$ прямой $\bar{a}_2$. Как нам уже известно, ввиду полярной сопряженности плоскости $\bar{\alpha}$ и прямой $S_1\bar{C}_2$ они будут перпендикулярными. Проходящая через данную точку $M(A_1, A_2)$ параллельно $S_1\bar{C}_2$ прямая MB_2 (рис.19), очевидно, будет искомым перпендикуляром.

Такое построение дает возможность в любой плоскости определить инволюционный пучек прямых, проектирующий абсолютную инволюцию данной плоскости.

Построим инволюционный пучек сопряженных направлений для произвольной плоскости $\alpha(a_1, a_2)$ (рис.28) при полярной связки (S_1). Через S_1 проведем прямую $S_1\bar{A}_2$ параллельную a_1 и точке $\bar{A}_2$, построим инволюционно-сопряженную точку A_2 в инволюции определенной парами точек $B_2 \pi \bar{B}_2$ и $O_2 \pi O_2^{\infty}$. Плоскость $\beta(b_1, b_2)$ сопряженная с прямой $\bar{a}_1$ в полярности связки (S_1), будет перпендикулярна прямой a_1. Теперь построим точку $\bar{C}_2$ инволюционно сопряженную с точкой C_2 в инволюции с парами $D_2 \pi \bar{D}_2$, $O_2 \pi \bar{O}_2^{\infty}$ на прямой d_2, сопряженной с направлением a_2. Плоскость $\gamma(d_1, d_2)$, сопряженная с прямой a параллельной a_2, очевидно перпендикулярна этой прямой.

Таким образом, плоскость $\beta(b_1, b_2)$ перпендикулярна прямой a_1 лежащей в плоскости $\alpha(a_1, a_2)$. Поэтому прямая a_1 будет перпендикулярна прямой $E_1 E_2$ являющейся пересечением указанных плоскостей. Плоскость же $\gamma(d_1 d_2)$ перпендикулярна прямой a_2. В силу этого прямая a_2 перпендикулярна прямой пересечения $F_1 C_2$ плоскостей $\alpha(a_1, a_2)$ и $\gamma(d_1; d_2)$.

Итак, в плоскости $\alpha(a_1, a_2)$ мы получили две пары сопряженных, т.е. перпендикулярных направлений $a_1 \perp E_1 E_2$ и $a_2 \perp F_1 C_2$. При помощи этих пар с центром в любой точке плоскости $\alpha(a_1, a_2)$ можно построить инволюционный пучок прямых, проектирующий абсолютную инволюцию плоскости $\alpha(a_1, a_2)$. Пусть M_α-произвольная точка этой плоскости. Прямые $a_\alpha, \bar{a}_\alpha$ и $b_\alpha, \bar{b}_\alpha$, проходящие через M_α и соответственно параллельные сопряженным прямым $a_1 \perp E_1 E_2$ и $a_2 \perp F_1 C_2$ определяют инволюционный пучок. Пользуясь указанной возможностью, в плоскости $\alpha(a_1, a_2)$ могут быть выполнены метрические построения точно так, как это было показано выше для плоскости Π_2. Поэтому, минуя основные построения 2 и 3, выполнимость которых очевидна, покажем выполнимость последующих метрических построений.

<u>Построение 4. На прямой $A_1 A_2$ дан отрезок MN и требуется отложить его (рис.29) от точки $M_{\alpha\beta}$ по прямой $B_1 B_2$.</u> С помощью известных построений через три точки M, N и $M_{\alpha\beta}$ проведем плоскость $\beta(b_1, b_2)$ и построим в этой плоскости параллелограмм $MNN_\beta M_{\alpha\beta}$. Очевидно отрезок $M_{\alpha\beta} N_\beta$ равен отрезку MN. Затем в плоскости β из центра $M_{\alpha\beta}$ радиусом $M_{\alpha\beta} N_\beta$ опишем дугу окружности K_β до встречи в точке $N_{\alpha\beta}$ с прямой пересечения $C_1 C_2$ плоскостей β и α. Далее, из центра

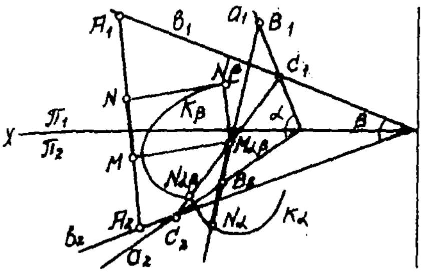


рис.29

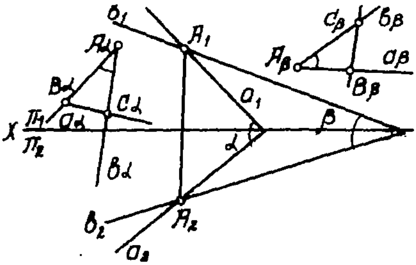


рис.30

$M_{\alpha\beta}$ радиусом $M_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}$ в плоскости α опишем дугу окружности K_α до встречи с B_1B_2 в точке N_α. Отрезок $M_{\alpha\beta}N_\alpha$ -искомый, так как он равен данному отрезку MN и отражен от точки $M_{\alpha\beta}$ по данной прямой B_1B_2.

Построение 5. Пусть в плоскости $\alpha(a_1,a_2)$ задан угол $\measuredangle\, a_\alpha, b_\alpha$ (рис.30) и требуется отложить его от луча a_β плоскости $\beta(b_1,b_2)$ в какую-либо сторону.

Построим прямую пересечения A_1A_2 плоскостей α и β. С какой либо точки C_α луча b_α опустим перпендикуляр $C_\alpha B_\alpha$ на луч a_α, (построение I) На луче a_β отложим отрезок $A_\beta B_\beta$, равный отрезку $A_\alpha B_\alpha$ (построение 4) из точки B_β восставим перпендикуляр к прямой a_β отложим на нем отрезок $B_\beta C_\beta$, равный отрезку $B_\alpha C_\alpha$ (построения 2 и 4). Прямоугольные треугольники $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ и $A_\beta B_\beta C_\beta$ равны. Поэтому угол $\measuredangle\, a_\beta b_\beta$ искомый. Он равен данному углу $\measuredangle\, a_\alpha b_\alpha$ и отложен от луча a_β плоскости β.

Выполнимость основных метрических построений на центральном чертеже доказывается аналогично тому, как это было показано для параллельного чертежа.

Исходя из известной общей проективной точки зрения на метрические построения в евклидовом пространстве, метрические построения на центральном изображении связываются с изображением кругового поляритета на плоскости $\mathcal{E}^{\infty}$, являющейся, как нам уже известно, центральной проекцией несобственной плоскости $\mathcal{E}'^{\infty}$ пространства.

По свойствам центрального проектирования, которые будут рассматриваться во второй главе, на плоскости чертежа абсолютная полярность изображается без искажения. Поэтому полярно сопряженные элементы на центральном чертеже строятся сравнительно проще, чем на параллельном. При этом центр полярной связки совпадает с центром центрального проектирования.

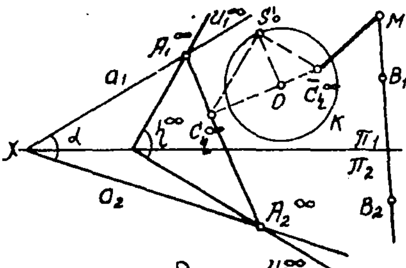


Рис. 31

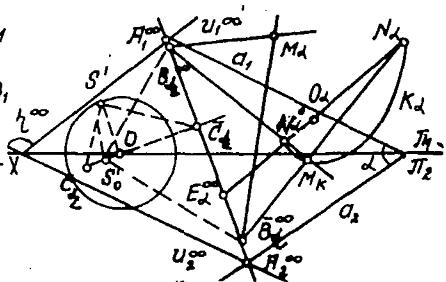


Рис. 32.

Если $\mathcal{E}^{\infty}$ – изображение несобственной плоскости (рис.31), O – основание перпендикуляра, опущенного из центра проектирования на плоскость центрального чертежа, а S'_0O – его длина, то окружность K с центром в точке O и радиусом S'_0O будет, как принято в литературе ее называть, дистанционной окружностью.

Для построения полюса прямой $A_1^{\infty}A_2^{\infty}$, из точки O на эту прямую опускается перпендикуляр OC_t^{∞} и строится прямоугольный треугольник $C_t^{\infty}S'_0\bar{C}_t^{\infty}$ высотой OS'_0. Точка $\bar{C}_t^{\infty}$ и будет искомым полюсом прямой $A_1^{\infty}A_2^{\infty}$.

Построение I. Построение перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость. Пусть дана плоскость $\alpha(a_1, a_2)$ (рис. 31); из точки $M(B_1 B_2)$ требуется опустить на эту плоскость перпендикуляр. Указанным выше способом строим полюс $\bar{C}_l^{\infty}$ несобственной прямой $A_1^{\infty} A_2^{\infty}$ плоскости $\alpha(a_1, a_2)$. Прямая, соединяющая точки $\bar{C}_l^{\infty}$ и M, будет искомым изображением перпендикуляра $\bar{C}_l'^{\infty} M'$, опущенного из точки M' на плоскость $\alpha'(a_1', b_1')$ в пространстве.

Возможность выполнения четырех остальных основных метрических построений следует из первого основного построения.

Для каждой плоскости может быть построено изображение абсолютной инволюции. Например, изображение абсолютной инволюции плоскости $\alpha(a_1, a_2)$ (рис. 32) i_α^{∞} строится следующим образом: Из O на прямую $A_1^{\infty} A_2^{\infty}$ опускаем перпендикуляр $O\bar{C}_\alpha$. Затем дугой радиусом $\bar{C}_\alpha S'$ на прямой $O\bar{C}_\alpha$ засекаем точку S_0', которая на прямой $A_1^{\infty} A_2^{\infty}$ определяет инволюцию i_α^{∞}. Каждая пара инвоционно сопряженных точек, как, например, B_α^{∞} и $\bar{B}_\alpha^{\infty}$, строится при помощи соответствующего прямоугольного треугольника $B_\alpha^{\infty} S_0' \bar{B}_\alpha^{\infty}$. Прямые $B_\alpha^{\infty} M_\alpha$ и $\bar{B}_\alpha^{\infty} M_\alpha$ изображения взаимно перпендикулярных прямых $B_\alpha'^{\infty} M_\alpha'$ и $\bar{B}_\alpha'^{\infty} M_\alpha'$ в плоскости $\alpha(a_1', a_2')$

Построение "окружности" K_α данного радиуса $O_\alpha N_\alpha$ осуществляется совершенно аналогично выполненным нами для параллельного чертежа построениям. Строим гармоническую четверку точек $E_\alpha^{\infty}, O_\alpha \div N_\alpha^{0}, N_\alpha$ и из точек N_α^{0} и N_α проектируем сопряженные точки инволюции i_α^{∞}. Точки пересечения соответственных лучей определяют "окружность" K_α данного радиуса.

Аналогично могут быть выполнены все остальные основные метрические построения.

ГЛАВА II. КОЛЛИНЕАРНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

§ 5. Обобщение проекционных изображений

В первой главе изучались свойства изображений пространства, полученных путем его проектирования на плоскость проекций. Было показано, что выбрав в пространстве произвольную пару основных полей π_1' и π_2', пересекающихся по прямолинейному ряду X', и спроектировав их из заданного центра проектирования S' на плоскость проекций H, получим поля π_1 и π_2 с общим прямолинейным рядом X находящимся с ними в перспективном соответствии:

$$\pi_1' \,\bar{\wedge}\, \pi_1, \quad \pi_2' \,\bar{\wedge}\, \pi_2 \quad и \ (X') \,\bar{\wedge}\, (X). \qquad (I)$$

Перспективности (I) устанавливают однозначное соответствие между проектируемым пространством и его проекционным изображением на плоскости проекций H. Мы убедились, что благодаря этой однозначности соответствия на проекционном изображении пространства могут быть однозначно изображены точки, прямые и плоскости и выявлены их пространственные отношения. Были доказана возможность выполнения над изображенными элементами пространства всех позиционных и метрических построений, привлекая для этой цели проективную точку зрения на евклидову метрику, как на проективные построения, связанные с абсолютным поляритететом на несобственной плоскости Σ^{∞}.

Переход от элементов проектируемого пространства к их изображению на проекционном изображении осуществляется не проектированием каждого в отдельности, а только лишь проектированием их связей с основными полями π_1 и π_2. Остальные построения уже могут быть выполнены непосредственно на плоскости чертежа и независимо от проектирования.

Однако с общей произвольной точки зрения нетрудно усмотреть возможность обоб...ния однозначной связи проектируемого пространства и его проекционного изображения на плоскости проекций.

Естественно что перспективности (I) можно заменить коллинеарностями (2)

$$\pi_1' \barwedge \pi_1 \ , \quad \pi_2' \barwedge \pi_2 \quad и \quad (X') \barwedge (X). \qquad (2)$$

Иначе говоря, произвольным полям π_1' и π_2' изображаемого пространства на плоскости изображений H можно сопоставить коллинеарные им поля π_1 и π_2 так, чтобы общему прямолинейному ряду (X') полей π_1' и π_2' по обеим коллинеациям $\pi_1' \barwedge \pi_1$ и $\pi_2' \barwedge \pi_2$ на плоскости H соответствовал единственный прямолинейный ряд (X).

Покажем, что такой подбор коллинеарностей всегда возможен. Пусть в изображаемом пространстве (рис.33) выбраны основные

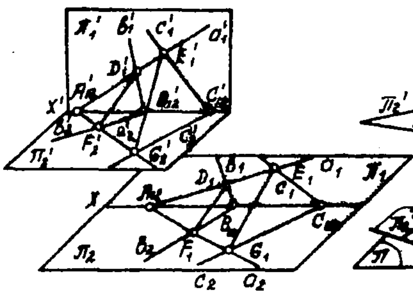


Рис.33

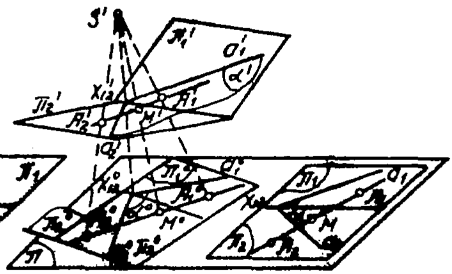


Рис.34

поля π_1' и π_2' с общим прямолинейным рядом. На прямой X' выберем произвольные три точки $A_{12}', B_{12}', C_{12}'$ и через них проведем прямые a_1' b_1' c_1', ..., лежащие в плоскости π_1', и прямые a_2', b_2', c_2', лежащие в плоскости π_2'. Аналогичные построения выполним на плоскости изображений π. На произвольной прямой X выделим произвольные три точки A_{12}, B_{12}, C_{12} и через них проведем прямые a_1, b_1, c_1 ,отнесенные к полю π_1, и прямые $a_2, b_2\ c_2$, отнесенные к полю π_2.

Теперь четверке прямых x', a'_1, b'_1, c'_1 сопоставим прямые x, a_1, b_1, c_1. Прямым же x', a'_2, b'_2, c'_2 – прямые x, a_2, b_2, c_2. Очевидно указанные две пары четверок прямых определят как раз коллинеарности (2):

$$\pi'_1(x', a'_1, b'_1, c'_1) \,\overline{\wedge}\, \pi_1(x, a_1, b_1, c_1),\ \pi'_2(x', a'_2, b'_2, c'_2) \,\overline{\wedge}\, \pi_2(x, a_2, b_2, c_2,$$
$$\text{и } (x') \,\overline{\wedge}\, (x).$$

Коллинеарности (2) можно получить и другим путем. Основные поля $\pi'_1 \times \pi'_2 \equiv X'_{12}$ (рис.34) изображаемого пространства на плоскость π спроектируем из S' . В результате получим перспективности $\pi'_1 \overline{\wedge} \pi^\circ_1, \pi'_2 \overline{\wedge} \pi^\circ_2$ и $(x') \overline{\wedge} (x)$. Если теперь поля $\pi^\circ_1 \times \pi^\circ_2 \equiv X^\circ_{12}$ в плоскости π в силу известных свойств коллинеаций подвергнем произвольному коллинеарному преобразованию, то получим новые поля $\pi_1 \times \pi_2 \equiv X_{12}$,находящиеся с основными полями $\pi'_1 \times \pi'_2 \equiv X'$ опять-таки в коллинеарности (2).

Следует заметить,что две пары четверок прямых (рис.33) $(x', a'_1, b'_1, c'_1) \overline{\wedge} (x, a_1, b_1, c_1)$ и $(x', a'_2, b'_2, c'_2) \overline{\wedge} (x, a_2, b_2, c_2)$ при помощи которых мы задали соответствия (2), во взаимном пересечении определяют дезарговы конфигурации: прямые $x', a'_1, b'_1, c'_1, a'_2, b'_2, c'_2$ – пространственную $A'_{12}(D'_1, B'_{12}, F'_2), (E'_1, C'_{12}, G'_2)$, а прямые $x, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ на плоскости π плоскую $A_{12}(D_1, B_{12}, F_2)(E_1 C_{12} G_2)$. Следовательно, сопоставлением произвольной пространственной дезарговой конфигурации с дезарговой конфигурацией, на плоскости изображении π , также могут быть определены коллинеарности (2).

В частном случае коллинеарности (2) могут оказаться и аффинными, если, например, соответственные тройки точек $E'_1, C'_{12}, G'_2 \overline{\wedge} E_1, C_{12} G_2$ переместить на прямых a'_1, x', a'_2 и a_1, x, a_2 в бесконечность; тогда мы будем иметь аффиности $\pi'_1 \overset{\text{аф}}{\overline{\wedge}} \pi_1$

$\Pi_1'\overset{a\Phi}{\overline{\wedge}}\Pi_2$ и $(X')\overset{a\Phi}{\overline{\wedge}}(X)$, определяемые сопоставлением произвольного тетраэдра $A_{12}'\,D_1'\,B_{12}'\,F_2'$ и полного четырехугольника $A_{12}\,D_1\,B_{12}\,F_2$ на плоскости изображений Π.

Теперь покажем, что коллениарностями (2) трехмерное пространство может быть отображено на плоскость Π взаимнооднозначно.

В первой главе подробно были рассмотрены однозначность соответствия и выполнимость всех пространственных позиционных, а также и метрических построений на изображении, полученных проектированием пространства на плоскость проекций Π (рис.34). Поэтому, преобразуя коллинеарно изображение $\Pi_1^0 \times \Pi_2^0 \equiv X_{12}^0$ в изображение $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ все эти построения также будут выполняться и соответствовать однозначно пространственным построениям в проектируемом пространстве по коллинеарностям (2). В связи с этим каждый элемент, например, плоское поле $\alpha'(a_1', a_2')$, прямолинейный ряд (A_1, A_2) и точка $M'(A_1' A_2')$, минуя изображение $\Pi_1^0 \times \Pi_2^0 \equiv X_{12}^0$, может быть отображен коллинеарностями (2) непосредственно на изображение $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$, с сохранением всех отношений между элементами.

Таким образом, на плоскости изображения Π получено более общее коллинеарное отображение $\Pi_1 \times \Pi_{12} \equiv X_{12}$ трехмерного пространства, чем проекционное $\Pi_1^0 \times \Pi_2^0 \equiv X_{12}^0$. Разумеется коллинеарное отображение в частном случае может оказаться аффинным.

В дальнейшем, в отличие от проекционных отображений трехмерного пространства, которые мы называли также центральным или параллельным чертежами, коллинеарные отображения трехмерного пространства будем называть коллинеарным или аффинным чертежами.

полям $\alpha(a_1,a_2)$, $\bar{\alpha}(\bar{a}_1,\bar{a}_2)$ и $\beta(b_1,b_2)$, $\bar{\beta}(\bar{b}_1,\bar{b}_2)$ и т.д. на плоскости отображений Π. В связи с этим имеем соответствия:

$$\alpha'(a_1',a_1')\,\overline{\wedge}\,\alpha(a_1,a_2),\ \alpha_1'(a_1',a_2')\,\overline{\wedge}\,\bar{\alpha}(\bar{a}_1,\bar{a}_2)\ и\ \beta'(b_1',b_2')\,\overline{\wedge}\,\beta(b_1,b_2)$$

$\beta'(b_1',b_2')\,\overline{\wedge}\,\bar{\beta}(\bar{b}_1,\bar{b}_2)$... и т.д. Следовательно, на плоскости Π имеем: $\alpha(a_1,a_2)\,\overline{\wedge}\,\bar{\alpha}(\bar{a}_1,\bar{a}_2)$, $\beta(b_1,b_2)\,\overline{\wedge}\,\bar{\beta}(\bar{b}_1,\bar{b}_2)$ и т.д. (3)

Таким образом, каждое поле в трехмерном пространстве на плоскости Π порождает коллинеацию двух полей и наоборот любой коллинеации на плоскости Π, построенной по (2^0) в трехмерном пространстве соответствует единственное плоское поле, определенное по отношению к основным полям Π_1' и Π_2'.

Соответственными по (3) окажутся так же и общие элементы соответственных полей, как например, $(A_1,A_2,M)\,\overline{\wedge}\,(\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{M})$ Особо следует исследовать свойства соответствия по (2^0) полей трехмерного пространства изображающихся на плоскости Π в поля, вырожденные в прямолинейные ряды точек.

Из первой главы нам уже известно, что на плоскости чертежа в прямолинейные ряды изображаются проектирующие плоскости, т.е. плоскости трехмерного пространства проходящие через центр проектирования. Все точки и прямые принадлежащие проектирующей плоскости проектируются на одну прямую, представляющую собой ее пересечение с плоскостью проекций. Тем не менее такие точки и прямые однозначно соответствуют своим проекциям в соответствии между трехмерным пространством и его проекцией, устанавливаемом проектированием.

В силу соответствий (2), ($\bar{2}$) и (2^0), указанное имеет место и на коллинеарных чертежах изображаемого трехмерного пространства.

На отображении $\Pi_1 \times \Pi_2 = X_{12}$ (Рис.35) возьмем произвольную прямую B_1B_2.

§ 6. Соответствие между плоскостными отображениями пространства

Отображаемое трехмерное пространство, отнесенное к основным полям $\pi_1' \times \pi_2' \equiv X_{12}'$, можно сколько угодно раз отобразить на плоскость отображений π, если в каждом отдельном случае основным полям пространства коллинеарно сопоставить основные поля на плоскости π. Очевидно, каждые два, полученные указанным образом отображения, также будут взаимно связаны коллинеарным соответствием.

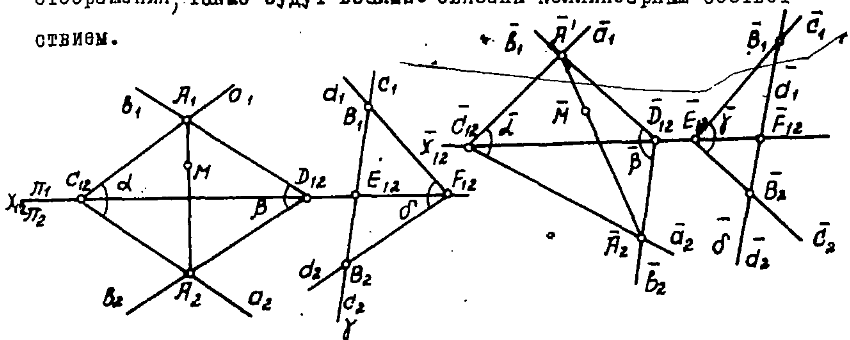


Рис. 35

Пусть изображаемое трехмерное пространство отнесено к произвольным двум полям $\pi_1' \times \pi_2' \equiv X_{12}'$. Отобразим его на плоскость отображений π дважды (рис. 35) по коллинеарностям:

$$\pi_1' \barwedge \pi_1, \ \pi_2' \barwedge \pi_2, (X_{12}') \barwedge (X_{12}); \qquad (2)$$

$$\pi_1' \barwedge \bar{\pi}_1, \ \pi_2' \barwedge \bar{\pi}_2, (X_{12}') \barwedge (\bar{X}_{12}). \qquad (\bar{2})$$

На плоскости отображений π получим два отображения $\pi_1 \times \pi_2 \equiv$ и $\bar{\pi}_1 \times \bar{\pi}_2 \equiv \bar{X}_{12}$, которые в силу коллинеарностей (2) и ($\bar{2}$) окажутся во взаимно однозначном соответствии:

$$\pi_1 \barwedge \bar{\pi}_1, \ \pi_2 \barwedge \bar{\pi}_2, \ и \ (X_{12}) \barwedge (\bar{X}_{12}). \qquad (2^0)$$

Действительно, каждое поле в пространстве, например, $\alpha'(a_1', a_2')$ $\beta'(b_1', b_2')$ и т.д., по соответствиям (2) и ($\bar{2}$) дважды коллинеарны

Рассматривая эту прямую как совмещение двух прямолинейных рядов точек (C_1) и (C_2) с общей точкой E_{12}, и принадлежащих полям π_1 и π_2, по (2) получим коллинеацию полей $\gamma'(C_1'\times C_2'\equiv E_{12}')\overline{\wedge}\gamma(C_1\times C_2\equiv E_{12})$. В этой коллинеации поле γ вырождено в прямолинейный ряд, и все-таки, каждому элементу поля γ' однозначно соответствует элемент на вырожденном поле γ. По соответствию $(\bar{2})$ полю $\gamma'(C_1'\times C_2'\equiv E_{12}')$ в общем случае будет соответствовать невырожденное плоское поле $\bar{\gamma}(\bar{C}_1\times\bar{C}_2\equiv\bar{E}_{12})$. Поэтому по (2^0) получим коллинеацию полей $\gamma(C_1\times C_2\equiv E_{12})\overline{\wedge}\bar{\gamma}(\bar{C}_1\times\bar{C}_2\equiv\bar{E}_{12})$. Аналогичным путем покажем, что вырожденному полю $\bar{\delta}(\bar{d}_1\times\bar{d}_2\equiv\bar{F}_{12})$ изображения $\bar{\pi}_1\times\bar{\pi}_2\equiv\bar{X}_{12}$ на изображении $\pi_1\times\pi_2\equiv X_{12}$ соответствует невырожденное поле $\delta(d_1\times d_2\equiv F_{12})$.

Таким образом, мы убеждаемся, что в общем случае на двух отображениях трехмерного пространства, соответствующих друг другу по (2^0), вырожденные поля не соответственны. **Однако всегда существует** единственная пара соответственных пучков вырожденных плоскостей.

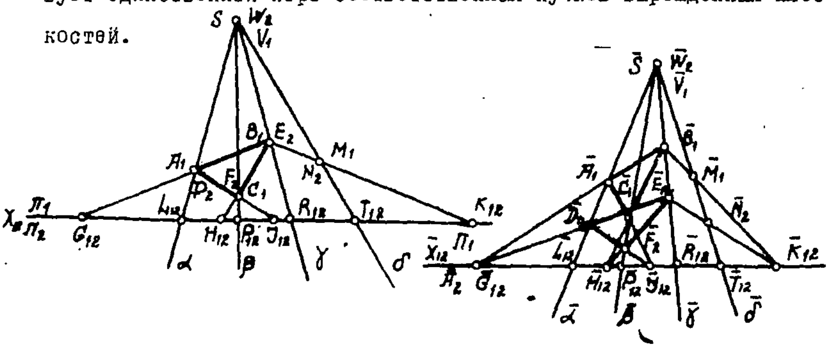


Рис. 36

В самом деле, пусть два изображения (рис,36) $\pi_1\times\pi_2\equiv X_{12}$ и $\bar{\pi}_1\times\bar{\pi}_2\equiv\bar{X}_{12}$ коллинеарны друг другу по $\pi_1\overline{\wedge}\bar{\pi}_1,\ \pi_2\overline{\wedge}\bar{\pi}_2,\ X_{12}\overline{\wedge}\bar{X}_{12}$ -(3) Треугольнику $A_1B_1C_1$ первого изображения по соответствию (3) на втором будет соответствовать единственный треугольник $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$

Но в точках A_1, B_1 и C_1 совмещены точки D_2, E_2 и F_2 поля π_2, образующие треугольник $D_2 E_2 F_2$, которому по коллинеации $\pi_1 \bar{\wedge} \bar{\pi}_2$ соответствует треугольник $\bar{D}_2 \bar{E}_2 \bar{F}_2$ уже не совпадающий с треугольником $\bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1$. Стороны этих треугольников пересекаются на прямой $\bar{X}_{12}$ в точках $\bar{G}_{12}, \bar{H}_{12}$ и $\bar{J}_{12}$ соответствующих по $X_{12} \bar{\wedge} \bar{X}_{12}$ точкам G_{12}, H_{12} и J_{12}. Поэтому в силу теоремы Дезарга, прямые $\bar{A}_1 \bar{D}_2, \bar{C}_1 \bar{F}_2$ и $\bar{B}_2 \bar{E}_2$ пройдут через одну точку $\bar{S}$. Очевидно, что преобразованием по (3) любой точки $M_1 N_2$ на втором изображении $\bar{\pi}_1 \times \bar{\pi}_2 \equiv \bar{X}_{12}$ получим прямую $\bar{M}_1 \bar{N}_2$, проходящую также через точку $\bar{S}$.

Легко заметить, что на втором изображении $\bar{\pi}_1 \times \bar{\pi}_2 \equiv \bar{X}_{12}$ прямые $\bar{L}_{12} \bar{A}_1, \bar{P}_{12} \bar{C}_1, \bar{R}_{12} \bar{B}_1, \bar{T}_{12} \bar{M}_1$, пересекающиеся в точке $\bar{V}_1$, определяют пучок прямых, принадлежащий плоскому полю $\bar{\pi}_1$, прямые же $\bar{L}_{12} \bar{D}_2, \bar{P}_{12} \bar{F}_2$, $\bar{R}_{12} \bar{E}_2, \bar{T}_{12} \bar{N}_2$, пересекающиеся в точке $\bar{W}_2$ – пучок прямых, принадлежащий плоскому полю $\bar{\pi}_2$. Лучи этих двух пучков прямых имеют общие точки $\bar{L}_{12}, \bar{P}_{12}, \bar{R}_{12}, \bar{T}_{12}$ на прямой $\bar{X}_{12}$ и поэтому образуют пучок вырожденных плоскостей $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$ с осью вырожденной прямой $\bar{V}_1 \bar{W}_2$.

Теперь пучки прямых $\bar{V}_1(\bar{L}_{12} \bar{A}_1, \bar{P}_{12} \bar{C}_1, \bar{R}_{12} \bar{B}_1, \bar{T}_{12} \bar{M}_1)$ и $\bar{W}_2(\bar{L}_{12} \bar{D}_2, \bar{P}_{12} \bar{F}_2, \bar{R}_{12} \bar{E}_2, \bar{T}_{12} \bar{N}_2)$ преобразуем по соответствиям (3) обратно на первое изображение $\pi_1 \times \pi_2 \equiv X_{12}$. Получим два плоских пучка прямых $V_1(L_{12} A_1, P_{12} C_1, R_{12} B_1, T_{12} M_1)$ и $W_2(L_{12} D_2, P_{12} F_2, R_{12} E_2, T_{12} N_2)$. Но эти пучки окажутся совмещенными ввиду попарного совпадения лучей $L_{12} A_1 \equiv L_{12} D_2$, $P_{12} C_1 \equiv P_{12} F_2$, $R_{12} B_1 \equiv R_{12} E_2$, $T_{12} M_1 \equiv T_{12} N_2$. Поэтому совпадут и их центры V_1 и W_2.

Таким образом, пучку вырожденных плоскостей $V_1 W_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots)$ по соответствиям (3) соответствует также вырожденный пучок плоскостей $\bar{V}_1 \bar{W}_2(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta} \cdots)$, представляющий собой исключение из множества всех остальных вырожденных плоскостей, в общем случае преобразующихся по (3), как было показано выше, в невырожденные плоскости.

Можно показать, что проективные пучки прямых $V_1(V_1A_1, V_1B_1, V_1C_1, V_1M_1 \dots) \barwedge \bar V_1(\bar V_1\bar A_1, \bar V_1\bar B_1, \bar V_1\bar C_1, \bar V_1\bar M_1 \dots)$ или $W_2(W_2D_2, W_2E_2, W_2F_2, W_2N_2 \dots) \barwedge \bar W_2(\bar W_2\bar D_2, \bar W_2\bar E_2, \bar W_2\bar F_2, \bar W_2\bar N_2)$ также проективны по всем коллинеациям плоских полей изображений $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ и $\bar\Pi_1 \times \bar\Pi_2 \equiv \bar X_{12}$ и соответственных по (3).

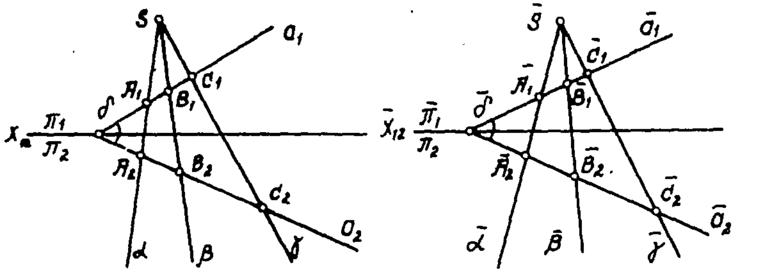


Рис.37

Зададим, например, коллинеацию двух изображений $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ и $\bar\Pi_1 \times \bar\Pi_2 \equiv \bar X_{12}$ соответствиями (рис.37).

$$\Pi_1 \barwedge \bar\Pi_1, \quad \Pi_2 \barwedge \bar\Pi_2 \quad и \quad X_{12} \barwedge \bar X_{12} \qquad (4)$$

Как было показано выше, всегда существует единственная пара пучков $S(\alpha, \beta, \gamma \dots) \barwedge \bar S(\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma \dots)$ Пусть далее, поля $\delta(a_1, a_2) \barwedge \bar\delta(\bar a_1, \bar a_2)$ коллинеарны по соответствиям (4). Тогда прямолинейные ряды точек $a_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \barwedge \bar a_1(\bar A_1, \bar B_1, \bar C_1 \dots)$ и $a_2(A_2, B_2, C_2 \dots) \barwedge \bar a_2(\bar A_2, \bar B_2, \bar C_2)$ проективны и по соответствиям основных полей $\Pi \barwedge \bar\Pi_1, \Pi_2 \barwedge \bar\Pi_2$, образуя при этом пучки прямых $S(SA_2, SB_2, SC_2 \dots) \barwedge \bar S(\bar S\bar A_2, \bar S\bar B_2, \bar S\bar C_2 \dots)$ проективные по $\delta_1 \barwedge \delta_2$. Но эти пучки совпадают с вырожденными пучками плоскостей $S(\alpha, \beta, \gamma \dots) \barwedge \bar S(\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma \dots)$. Поэтому они совпадут и с пучками прямых (рис.36) $V_1(V_1A_1, V_1B_1, V_1C_1, V_1M_1) \barwedge \bar V_1(\bar V_1\bar A_1, \bar V_1\bar B_1, \bar V_1\bar C_1, \bar V_1\bar M_1)$, чем доказывается справедливость нашего утверждения.

§ 7. Основное предложение центрального проектирования

С существованием коллинеарных и перспективных отображений трехмерного пространства на плоскость связано возникновение вопроса, решение которого имеет основное значение в теории изображений. Сущность этого вопроса заключается в следующем: Всякое перспективное или, что то же самое, проекционное изображение является особым частным случаем коллинеарного отображения. Если на плоскости чертежа изображение трехмерного пространства, отнесенного к основным полям $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$, получено проектированием /центральным или параллельным/ то, как мы уже знаем, связь между пространством и его проекцией осуществляется перспективностями $\Pi_1' \bar{\wedge} \Pi_1$, $\Pi_2' \bar{\wedge} \Pi_2$ и $X_{12}' \bar{\wedge} X_{12}$. (I)
Переход от пространства к изображению осуществляется при помощи перспективности, т.е. проектирования. Однако нарушением перспективности перемещением плоскости изображения в произвольное расположение по отношению к проектируемому пространству перспективности (I) превращаются в коллинеарности $\Pi_1' \wedge \Pi_1$, $\Pi_2' \wedge \Pi_2$ и $X_{12}' \wedge X_{12}$ (2). Переход от пространства к изображению происходит уже при помощи коллинеарностей (2). Перспективное изображение превращается в коллинеарное. Но это коллинеарное отображение первоначально было перспективным и поэтому оно всегда может быть возвращено в свое первоначальное расположение. В таких случаях говорят, что коллинеарное отображение $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ и трехмерное пространство $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$ могут быть приведены в перспективное расположение. То есть существуют центр проектирования S' и такое расположение плоскости проекций Π по

отношению к пространству $\pi_1' \times \pi_2' \equiv X_{12}'$, при котором оно из центра S' спроектируется в изображение $\pi_1 \times \pi_2 \equiv X_{12}$.

Однако, как нам известно, трехмерное пространство $\pi_1' \times \pi_2' \equiv X_{12}'$ может быть отображено на плоскость изображений π, минуя промежуточное проектирование, непосредственно в изображение $\pi_1 \times \pi_2 = X_{12}$ коллинеарностями $\pi_1' \barwedge \pi_1$, $\pi_2' \barwedge \pi_2$ и $X_{12}' \barwedge X_{12}$ (3)

В таком случае заранее уже неизвестно возможно ли всегда изображение, полученное соответствиями (3), привести с трехмерным пространством в перспективное расположение. Сущность указанного в начале параграфа вопроса как раз заключается в этом.

Ниже будет доказано, что если трехмерное пространство $\pi_1' \times \pi_2' = X_{12}'$ соответствиями (3) отображено на плоскость π в отображение $\pi_1 \times \pi_2 \equiv X_{12}$, то привести их в перспективное расположение возможно лишь при определенных условиях.

В § 5 было показано, что задание коллинеарностей (3) равносильно сопоставлению пространственной и плоской дезарговых конфигураций. Поэтому решение, поставленного вопроса сводится к доказательству конкретной теоремы о проектируемости данной пространственной дезарговой конфигурации в данную плоскую дезарговую конфигурацию и носит название основной теоремы центрального проектирования.

Прежде чем изложим содержание этой теоремы, ознакомимся с некоторыми особенностями проектирования пространственной дезарговой конфигурации на плоскость проекций.

Пусть пространственная дезаргова конфигурация $D' \equiv O'(O'A'A_1', O'B'B_1', O'C'C_1')$ из центра проектирования S' (рис.38) на плоскость H спроектирована в плоскую дезарговую конфигурацию $D \equiv O(OAA_1,$

$OBB_1, OCC_1)$. Каждое плоское поле трехмерного пространства по отношению к пространственной дезарговой конфигурации определяется треугольником, по которому оно пересекается с ребрами $O'A_1', O'B_1'$ и $O'C_1'$ этой конфигурации (за исключением полей,

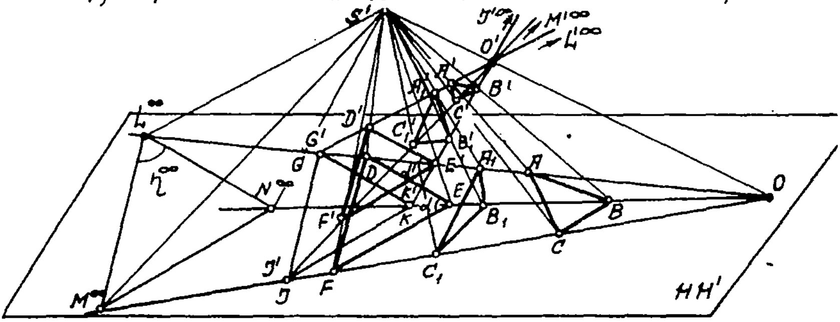


Рис.38

проходящих через O').Поэтому проекция треугольника вершинами будет принадлежать ребрам OA_1, OB_1 и OC_1 плоской дезарговой конфигурации $D \equiv O(OAA_1, OBB_1, OCC_1)$ и на плоскости H по отношению этой конфигурации определит плоское поле, являющееся проекцией из S' рассматриваемого плоского поля пространства. Ясно,что каждое поле и его проекция на H будут перспективны по S' .

Особо следует рассмотреть плоские поля пространства, параллельные плоскости проекций H . Пусть плоское поле α' параллельно плоскости H и пересекает ребра пространственной дезарговой конфигурации в точках определяющих треугольник $D'E'F'$. В силу указанной параллельности треугольники $D'E'F'$ и DEF будут подобными, в связи с чем соответствие полей α и α' окажется подобием. Следовательно, на изображениях всех полей параллельных плоскости H сохранится без искажения и перпендикулярность прямых.

Среди этих полей сама плоскость проекций H по отношению к пространственной дезарговой конфигурации определяется треугольником $G'J'K'$,который совпадает со своей проекцией GJK. Поэтому соответствие между полями H и H' является тождеством.

Основываясь на изложенном, можно доказать, что при центральном проектировании абсолютная полярность пространства на плоскость проекций H изображается без искажения опять в круговую полярность. В этом легко убедиться если обратимся к проекции из S' на H треугольника $M'^{\infty}N'^{\infty}L'^{\infty}$ определяющего несобственную плоскость ζ'^{∞} трехмерного пространства относительно дезарговой конфигурации $D' \equiv O'(OA'A_1', OB'B_1', OC'C_1')$.Пусть треугольник $M^{\infty}N^{\infty}L^{\infty}$ является проекцией несобственного треугольника $M'^{\infty}N'^{\infty}L'^{\infty}$, тогда несобственное поле $\zeta'^{\infty}(M'^{\infty}, N'^{\infty}, L'^{\infty})$ и его проекция $\zeta^{\infty}(M^{\infty}, N^{\infty}, L^{\infty})$ перспективны $\zeta'^{\infty} \overline{\wedge} \zeta^{\infty}$. Но несобственное поле $\zeta'^{\infty}(M'^{\infty}, N'^{\infty}, L'^{\infty})$ перспективно по центру перспективы O' и полю $H(J,K,G)$. Следовательно поля $\zeta^{\infty}(M^{\infty}, N^{\infty}, L^{\infty})$ и $H(J,K,G)$ гомологичны по центру O или $\zeta^{\infty}(M^{\infty}, N^{\infty}, L^{\infty}) \overset{O}{\overline{\wedge}} H(J,K,G)$. В этой гомологии (по построению) соответственные треугольники $M^{\infty}N^{\infty}L^{\infty}$ и JKG подобны и поэтому она представляет собой гомологию подобия. Отсюда следует, что абсолютная полярность Π'^{∞}, спроектированная из O' на поле H в круговой поляритет Π по гомологии подобия $\zeta^{\infty}(M^{\infty}, N^{\infty}, L^{\infty}) \overset{O}{\overline{\wedge}} H(J,K,G)$, преобразуется на поле ζ^{∞} опять в круговой поляритет Π^{∞}. Этим и доказывается справедливость утверждения о проектируемости абсолютной полярности Π'^{∞} из центра S' на поле ζ^{∞} в круговую же полярность, разумеется с мнимой фундаментальной окружностью.

Докажем теперь основную теорему центрального проектирования.

Плоская дезаргова конфигурация $D \equiv O(OAA_1, OBB_1, OCC_1)$ является центральной проекцией пространственной дезарговой конфигурации $D' \equiv O'(O'A'A_1', O'B'B_1', O'C'C_1')$, если треуголтники, вершины которых по соответствиям прямолинейных рядов точек $(O, A, A_1 \overline{\wedge} O', A', A_1')$

$(O,B,B_1 \barwedge O',B',B_1')$ и $(O,C,C_1 \barwedge O',C',C_1')$ соответствуют несобственным точкам, подобны.

Докажем сперва необходимость условия теоремы.

Пусть (рис.39) пространственной дезарговой конфигурации $O'(O'A'A_1', O'B'B_1'; O'C'C_1')$ на плоскости P сопоставлена плоская дезаргова конфигурация $O(OAA_1, OBB_1, OCC_1)$ при этом так; что по проективным соответствиям прямолинейных рядов точек $(O,A,A_1 \barwedge O',A',A_1'),(O,B,B_1 \barwedge O',B',B_1')$ и $(O,C,C_1 \barwedge O',C',C_1')$ треугольники GHJ и $E'F'D'$ составленные из точек, соответствующих несобственным точкам $G'^{\infty}, H'^{\infty}, J'^{\infty}, E^{\infty}, F^{\infty}, D^{\infty}$ этих рядов, подобны. По проективному соответствию рядов $(O,B,B_1 \barwedge O',B',B_1')$ построим точки N' и L', соответственные точкам N и L. Очевидно, что две пары проективных прямолинейных рядов $(O,A,A_1,G,D^{\infty} \barwedge O',A',A_1',G_1'^{\infty},D')$ и $(O,C,C_1,J,F^{\infty} \barwedge O',C',C_1',J'^{\infty},F')$ между плоскими полями P и $A'O'C'$ устанавливают единственное коллинеарное соответствие. В этом коллинеарном соответствии прямолинейному ряду точек O, B, L, B_1, N, H, E^{∞}, в плоском поле $A'O'C'$ будет соответствовать некоторый прямолинейный ряд точек O', B'', L'', B_1'', N'', H'', E''. Таким образом, один и тот же прямолинейный ряд точек O, B, L, B_1, N, H, E^{∞} в пространстве проективен двум прямолинейным рядам точек $O', B', L', B_1', N', H'^{\infty}, E'$ и $O', B'', L'', B_1'', N'', H'', E''$, поэтому эти прямолинейные ряды точек проективны между собой, то есть $O', B', L', B_1', N', H'^{\infty}, E'$ проективен ряду $O', B'', L'', B_1'', N'', H'', E''$. Но так как одна пара соответственных точек O' и O' совпадает, то эти ряды не только проективны, но и перспективны, в связи с чем существует точка S — центр перспективы, являющаяся точкой пересечения прямых, соединяющих соответственные точки.

Покажем, что центр перспективы лежит в плоскости точек E', F', D',

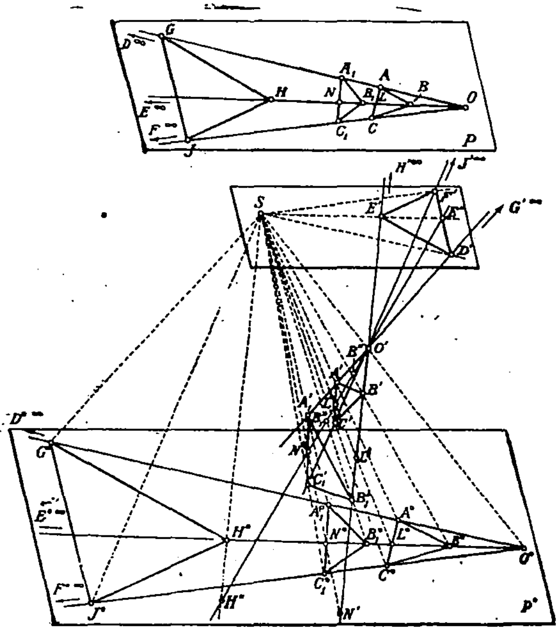


Рис.39

соответствующих в плоской дезарговой конфигурации несобственным точкам $E^{\infty}, F^{\infty}, D^{\infty}$. В самом деле, из всех прямых, соединяющих соответственные точки и проходящих через центр перспективы S, одна прямая $E'E''$ лежит в плоскости $E'F'D'$, отсюда следует, что и точка S' лежит также в этой плоскости. Проведем теперь некоторую плоскость P°, параллельную плоскости $E'F'D'$ и данную пространственную конфигурацию спроектируем из центра S' на эту плоскость . При таком проектировании ,ввиду перспективности рядов точек $O', B', L'\, B_1', N', H'^{\infty}, E' \,\overline{\wedge}\, O', B'', L'', B_1'', N'', H'', E''$, эти ряды спроектируются на плоскости P° в один прямолинейный ряд точек $O^{\circ}, B^{\circ}, L^{\circ}, B_1^{\circ}, N_1^{\circ}, H_1^{\circ}, E^{\circ\infty}$ проективный прямолинейному ряду точек

$O, B, L, B_1, N, H, E^{\infty}$ а прямолинейные ряды $O', A', A_1', D', G'^{\infty}$ и O', C', C_1' F', J'^{∞} в ряды точек $O^\circ, A^\circ, A_1^\circ, D^{\circ\infty}$ и $O^\circ, C^\circ, C_1^\circ, F^{\circ\infty}, J^\circ$ проективные прямолинейным рядам точек O, A, A_1, D^{∞}, G и O, C, C_1 F^{∞}, J. Но так как в проективном соответствии этих трех пар соответственных рядов несобственные точки $(D^{\circ\infty}, D^{\infty}), (E^{\circ\infty}, E^{\infty})$ и $(F^{\circ\infty}, F^{\infty})$ **соответствуют друг другу**, то рассматриваемые прямолинейные ряды точек находятся в аффинном соответствии. Аффинным соответствием этих трех пар прямолинейных рядов устанавливается аффинное соответствие между плоскими полями точек $P(O, A, A_1, B, B_1, C, C_1, L, N, G, H, J)$ и $P^\circ(O^\circ, A^\circ, A_1^\circ, B^\circ, B_1^\circ, C^\circ, C_1^\circ, L^\circ, N^\circ, G^\circ, H^\circ, J^\circ)$ Но в этом аффинном соответствии плоских полей P и P° соответственные точки G, H, J и $G^\circ, H^\circ, J^\circ$ образуют подобные треугольники GHJ и $G^\circ H^\circ J^\circ$, так как треугольник G, H, J по первоначальному условию теоремы подобен треугольнику $D'E'F'$, а треугольник $D'E'F'$ подобен треугольнику $G^\circ H^\circ J^\circ$ по построению / треугольник $G^\circ H^\circ J^\circ$ представляет сечение трехгранного угла $SG^\circ H^\circ J^\circ$, ребрами $SG^\circ, SH^\circ, SJ^\circ$ параллельного ребрам трехгранного угла $O'D'E'F'$, плоскостью P°, параллельной плоскости $D'E'F'$/. Поэтому аффинное соответствие плоских полей P и P° есть соответствие подобия, откуда следует, что соответственные друг другу, по соответствию плоских полей P и P°, дезарговы конфигурации $O(OAA_1, OBB_1, OCC_1)$ и $O^\circ(O^\circ A^\circ A_1^\circ, O^\circ B^\circ B_1^\circ, O^\circ C^\circ C_1^\circ)$ подобны. Таким образом данная дезаргова пространственная конфигурация $O'(O'A'A_1', O'B'B_1', O'C'C_1')$ из центра перспективы S спроектировалась в плоскую дезаргову конфигурацию $O^\circ(O^\circ A^\circ A_1^\circ, O^\circ B^\circ B_1^\circ, O^\circ C^\circ C_1^\circ)$, подобную данной плоской дезарговой конфигурации $O(OAA_1, OBB_1, OCC_1)$. Очевидно, что передвижением в пространстве плоскости P° параллельно самой себе пододобие между плоскими дезарговыми конфигурациями будет сохраняться, изменится лишь коэффициент подобия. В связи с этим, передвижением плоскости P° параллельно своему первоначальному положению можно добиться и равенства плоских дезарговых конфигураций $O^\circ(O^\circ A^\circ A_1^\circ, O^\circ B^\circ B_1^\circ, O^\circ C^\circ C_1^\circ)$ и $O(OAA_1, OBB_1, OCC_1)$. Тогда данная плоская дезаргова конфигурация $O(OAA_1, OBB_1, OCC_1)$ будет центральной проекцией данной пространственной конфигурации $O'(O'A_1', O'B'B_1', OC'C_1')$, чем и доказывается достаточность условия теоремы для перспективности двух дезарговых конфигураций.

Необходимость условия легко усматривается по рис.39.

В самом деле, пусть конфигурация $O'(O'A'A_1', O'B'B_1', O'C'C_1')$ перспективна конфигурации $O^\circ(O^\circ A^\circ A_1^\circ, O^\circ B^\circ B_1^\circ, O^\circ C^\circ C_1^\circ)$ равной данной конфигурации $O(OAA_1, OBB_1', OCC_1)$. Тогда существует центр перспективы S. Из центра перспективы S спроектируем несобственные точки $H'^\infty_1, J'^\infty_1, G'^\infty_1, D^{\circ\infty}_1, E^{\circ\infty}_1, F^{\circ\infty}$ в собственные точки $H_1^\circ, J_1^\circ, G_1^\circ$, D_1', E_1', F'. Совершенно очевидно, что треугольники $G^\circ H^\circ J^\circ$ и $D_1' E_1' F'$ (как сечения параллельными плоскостями двух трехгранных углов с параллельными ребрами) будут непременно подобными.

Доказанная теорема является основным предположением центрального проектирования, так как она дает возможность решить два важных вопроса:

I. Является ли данное коллинеарное изображение, построенное по соответствиям $\Pi_1' \overline{\wedge} \Pi_1$, $\Pi_2' \overline{\wedge} \Pi_2$ и $X_{12}' \overline{\wedge} X_{12}$, (I) центральной проекцией трехмерного пространства $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$?

Для этого следует соответствия (I) заменить дезарговыми конфигурациями $D' \overline{\wedge} D$ и построить треугольники вершинами, соответствующими несобственным точкам ребер этих конфигураций. Изображение $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ будет центральной проекцией трехмерного пространства $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$ если указанные треугольники окажутся подобными.

2. Как задать соответствия (I), чтобы коллениарное по (I) изображение $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ явилось центральной проекцией трехмерного пространства $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$

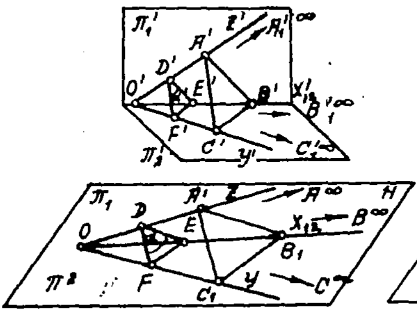


Рис.40

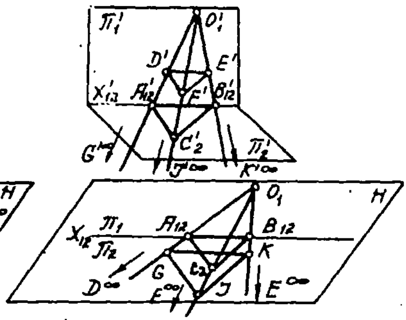


Рис.4I

Для этого в пространстве (рис.40) через произвольную точку O' проведем три не лежащие в одной плоскости прямые X_{12}', y' и z'. Построим произвольный треугольник $A'B'C'$ вершинами, принадлежащими прямым X_{12}', y', z'. Далее, на плоскости изображений H начертим треугольник $A_1 B_1 C_1$, подобный треугольнику $A'B'C'$, и произвольную точку O прямыми X_{12}, y и z соединим с точками B_1, A_1, C_1.

Теперь зададим проективные соответствия прямолинейных рядов точек:

$$
\begin{aligned}
&X_{12}'(O', B', B_1'^{\infty}) \barwedge X_{12}(O, B^{\infty}, B_1);\\
&y'(O', C', C_1'^{\infty}) \barwedge y(O, C^{\infty}, C_1); \qquad (2)\\
&z'(O', A', A_1'^{\infty}) \barwedge z(O, A^{\infty}, A_1).
\end{aligned}
$$

В результате этих построений, пространственной дезарговой конфигурации $\mathcal{D}' \equiv O'(O'A'A_1'^{\infty}, O'B'B_1'^{\infty}, O'C'C_1'^{\infty})$ на плоскости изображений H будет сопоставлена плоская дезаргова конфигурация $\mathcal{D} \equiv O(OA^{\infty}A_1, OB^{\infty}B_1, OC^{\infty}C_1)$ удовлетворяющая требованию основной теоремы: треугольники $A'B'C'$ и $A_1B_1C_1$, вершины которых по (2) соответствуют несобственным точкам, подобны. В связи с этим, как утверждает теорема, конфигурация $\mathcal{D}$ является центральной проекцией конфигурации $\mathcal{D}'$.

При помощи сопоставления найденных дезарговых конфигураций возможно определить искомые соответствия (I):

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_1'(A', A_1'^{\infty}, B', B_1'^{\infty}) \,\overline{\wedge}\, \mathcal{J}_1(A^{\infty}, A_1, B^{\infty}, B_1); \\ &\mathcal{J}_2'(B', B_1'^{\infty}, C', C_1'^{\infty}) \,\overline{\wedge}\, \mathcal{J}_2(B^{\infty}, B_1, C^{\infty}, C_1); \qquad\qquad (I) \\ &X_{12}'(O', B', B_1'^{\infty}) \,\overline{\wedge}\, X_{12}(O, B^{\infty}, B_1). \end{aligned}$$

Однако соответствия (I) могут быть определены проще.

В ходе доказательства основного предложения было установлено, что при условии подобия треугольников $A_1B_1C_1$ и $A'B'C'$ /рис.40 плоскому полю $\alpha'(\mathcal{D}', E', F')$ параллельному плоскости $A'B'C'$ на плоскости H по $\mathcal{D}' \,\overline{\wedge}\, \mathcal{D}$ соответствует подобное ему поле $\alpha(\mathcal{D}, E, F)$, также параллельное плоскости $A_1B_1C_1$. Исходя из этого, изображение $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2 \equiv X_{12}$ также явится /рис.41/ центральной проекцией трехмерного пространства $\mathcal{J}_1' \times \mathcal{J}_2' \equiv X_{12}'$, если одна из двух коллинеаций $\mathcal{J}_1' \,\overline{\wedge}\, \mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2' \,\overline{\wedge}\, \mathcal{J}_2$ будет подобием. Действительно, пусть отображение $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2 \equiv X_{12}$ трехмерного пространства $\mathcal{J}_1' \times \mathcal{J}_2' \equiv X_{12}'$ на плоскости H построено соответствиями $\mathcal{J}_1' \,\overline{\wedge}\, \mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2' \xrightarrow[\wedge]{\text{подоб.}} \mathcal{J}_2$ и $X_{12}' \xrightarrow[\wedge]{\text{афф.}} X_{12}$. (I'). Тогда по этому соответствию дезарговой конфигурации $\mathcal{D}' \equiv (O_1', A_{12}'G'^{\infty}, O_1'B_{12}'K'^{\infty}, O_1'C_2'J'^{\infty})$ на плоскости H будет соответствовать плоская дезаргова конфигурация $\mathcal{D} \equiv (O_1 A_{12} G, O_1 B_{12} K, O_1 C_2 J)$. Для этих конфигураций треугольники GJK и $\mathcal{D}'E'F'$ вершинами, соответствующими по (I^1) несобственным точкам, в силу подобия треугольников $A_{12}' B_{12}' C_{12}'$ и $A_{12} B_{12} C_{12}$ окажутся также подобными. Следовательно, дезаргова конфигурация D явится центральной проекцией конфигурации D', а потому и соответствия (I^1) будут искомыми.

§ 8. Основное предложение параллельного проектирования

Мы уже знаем, что коллинеарное отображение пространства на плоскость в частном случае может оказаться аффинным, если основные поля определяющие пространство и изображение, находятся в аффинном соответствии:

$$\Pi_1' \overset{\text{аф.}}{\overline{\wedge}} \Pi_1 \ , \quad \Pi_2' \overset{\text{аф.}}{\overline{\wedge}} \Pi_2 \quad и \quad X_{12}' \overset{\text{аф}}{\overline{\wedge}} X_{12} \ . \qquad (I)$$

При этом задание соответствий (1) равносильно сопоставлению произвольного тетраэдра и полного четырехугольника на плоскости изображений.

Как и в общем случае коллинеарного отображения, здесь также ставится аналогичный вопрос о возможности перспективного расположения изображаемого пространства и его аффинного изображения. Разумеется эта перспективность может быть осуществлена только лишь параллельным проектированием, т.е. является ли произвольное аффинное изображение $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ построенное по соответствиям (1) параллельной проекцией изображаемого пространства $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$?

Учитывая же возможную замену соответствий (1) фигурами, поставленный вопрос сводится к вопросу проектируемости данного в пространстве тетраэдра в данный полный четырехугольник на плоскости проекций.

Ответ на решение этого вопроса дает основное предложение параллельного проектирования, носящее название теоремы Польке-Шварца:

Произвольный данный полный четырехугольник всегда является параллельной проекцией тетраэдра подобно любому данному тетраэдру

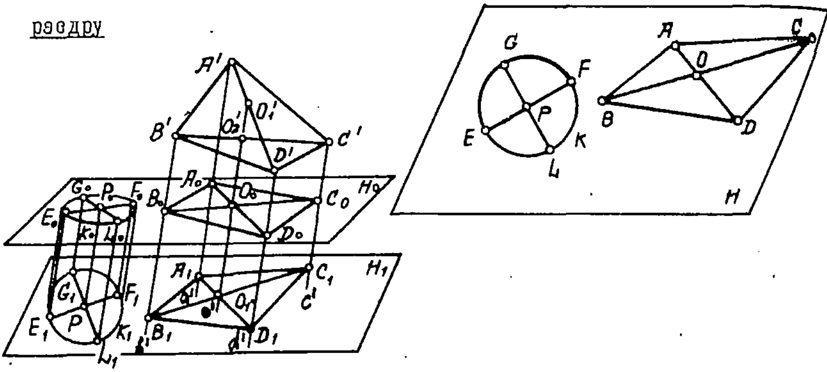


Рис.42

Пусть тетраэдру $A'B'C'D'$ (рис.42) на плоскости H сопоставлен полный четырехугольник $ABCD$. На ребрах $A'D'$ и $B'C'$ подберем точки O_1' и O_2', удовлетворяющие условиям:

$$\frac{A'O_1'}{O_1'D'}=\frac{AO}{OD} \quad и \quad \frac{B'O_2'}{O_2'C'}=\frac{BO}{OC} \qquad (2)$$

Построим прямую $O_1'O_2'$ и через вершины A', B', C', D' проведем прямые a', b', c', d', параллельные прямой $O_1'O_2'$. Плоскость H_0, перпендикулярная к прямым a', b', c', d', o', пересечет их в точках A_0, B_0, C_0, D_0, образующих четырехугольник $A_0B_0C_0D_0O_0$, представляющий собой ортогональную проекцию тетраэдра $A'B'C'D'$ на плоскость H_0. Поэтому на основании равенств (2) получим

$$\frac{A_0O_0}{O_0D_0}=\frac{AO}{OD} \quad и \quad \frac{B_0O_0}{O_0C_0}=\frac{BO}{OC}. \qquad (3)$$

Равенства (3) показывают, что четырехугольники $A_0B_0C_0D_0$ и $ABCD$ аффинны и между точками полей H_0 и H устанавливают определенную аффинную коллинеацию. В этой аффинной коллинеации окружности $K(E,F,G,L)$ плоскости H на плоскости H_0 соответствует определенный эллипс $K_0(E_0,F_0,G_0,L_0)$. Совокупность прямых перпендикулярных к плоскости H_0, в точках (E_0,F_0,G_0,L_0) эллипса K_0 образует прямой эллиптический цилиндр с основанием – эллипсом K_0. Пусть $K_1(E_1,F_1,G_1,L_1)$-круговое сечение этого цилиндра. Тогда плоскость этого кругового сечения H_1 проектирующие прямые a', b', c', d', o' пересечет по четырехугольнику $A_1B_1C_1D_1O_1$ перспективном четырехугольнику $A_0B_0C_0D_0O_0$, который, как уже убедились, аффинен четырехугольнику $ABCDO$. Следовательно, имеем цепь соответствий $H_1(A_1,B_1,C_1,D_1,O_1), K_1(E_1,F_1,G_1,L_1) \overset{a\phi}{\overline{\wedge}} H_0(A_0,B_0,C_0,D_0,O_0), K_0(E_0,F_0,G_0,L_0) \overset{a\phi}{\overline{\wedge}} H(A,B,C,D,O),\ K(E,F,G,L)$, откуда можно заключить

$$H_1(A_1,B_1,C_1,D_1,O_1), K_1(E_1,F_1,G_1,L_1) \overset{a\phi}{\overline{\wedge}} H(A,B,C,D,O), K(E,F,G,L). \quad (4)$$

Но в аффинном соответствии (4) полей H_1 и H окружности $K_1(E_1,F_1,G_1,L_1)$ соответствует также окружность $K(E,F,G,L)$. Поэтому соответствие (4) является соответствием подобия и следовательно, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ подобен четырехугольнику $ABCD$. Если теперь подобно изменим пространственную фигуру $A'B'C'D'A_1B_1C_1D_1$, то можно добиться равенства указанных соответственных четырехугольников и получим, что четрехугольник $ABCD$ будет проекцией тетраэдра подобного данному тетраэдру $A'B'C'D'$. Этим и доказывается справедливость теоремы Польке-Шварца.

Доказанная основная теорема параллельного проектирования дает нам право всякое аффинное отображение $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ изображаемого пространства $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$, построенное по соответствиям

$$\Pi_1'(B_{12}',A_1',C_{12}') \overset{a\phi}{\overline{\wedge}} \Pi_1(B_{12},A_1,C_{12}),\ \Pi_2(B_{12}',D_2',C_{12}') \overset{a\phi}{\overline{\wedge}} \Pi_2(B_{12},D_2,C_{12})$$

$$X_{12}'(B_{12}',C_{12}') \overset{a\phi}{\overline{\wedge}} X_{12}(B_{12},C_{12}). \quad (5)$$

рассматривать как параллельную проекцию пространства, подобного пространству $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$

В частном же случае задания соответствий (5), когда одна из пар соответствий основных полей $\Pi_1' \underset{\wedge}{\overset{\text{аф}}{-}} \Pi_1$ или $\Pi_2 \underset{\wedge}{\overset{\text{аф}}{-}} \Pi_2$ будет представлено их равенством (например, $\Pi_2 \underset{\wedge}{\overset{\text{равно}}{-}} \Pi_2$) аффинное отображение $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ явится уже параллельной проекцией непосредственно самого изображаемого пространства $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$.

§ 9. Инженерный чертеж

Изученные нами плоскостные изображения трехмерного пространства имеют весьма широкое применение в инженерном деле. При проектировании любого инженерного сооружения его плоскостное изображение дает инженеру возможность иметь полное представление и суждение о будущем сооружении, выявлять и устранять его возможные недостатки, производить графические расчеты, определять оптимальные размеры деталей, конструкций, сравнивать отдельные варианты и т.д.

Все это на плоскостные изображения пространства применяемые в инженерном деле, накладывает определенные жесткие практические требования, заключающиеся в следующем:

1. Переход от пространства $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$ к изображению $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ должен быть наипростейшим.

2. Позиционные и метрические построения на изображении, соответствующие в пространстве $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$ пространственным построениям должны быть выполнимы по возможности существующими чертежными инструментами, то есть циркулем и линейкой.

3. Изображение $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ должно быть максимально наглядным и вызывать при его рассмотрении созерцание трехмерного физического пространства.

4. Изображение $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ должно быть удобоизмеримым, т.е. ,определение истинных размеров пространственных форм, искаженных на изображении, должно осуществляться построениями выполняемыми максимально циркулем и линейкой..

Плоскостные изображения удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются инженерными чертежами.

Требуемые упрощения на инженерном чертеже получаются в частных случаях отображений пространства на плоскость. В первых двух главах мы в отвлеченной общей геометрической форме изучали принципиальные возможности однозначного отображения трехмерного пространства на плоскость проекций и выполнимости пространственных позиционных и метрических построений. Теперь же, учитывая требования инженерного чертежа, и используя все известное об изображениях, будем выбирать частные случаи, дающие уже практически приемлемые результаты.

5. Основные поля Π_1' и Π_2' в пространстве берутся всегда взаимноперпендикулярными

6. Точки изображаемого пространства по отношению к полям координируются перпендикулярными к этим полям прямыми

7. Плоскость проекций H в большинстве случаев берется параллельной или совпадающей с ... м из основных полей Π_1' и ... .

8. При аффинных отображениях угол проектирования на . юскость проекций H выбирается преимущественно 90^0 или 45^0.

В зависимости от перечисленных частных условий изоб[р]ния, инженерные чертежи оказываются различными. Разуме[е] каждый отдельный вид инженерного чертежа не может в один[аковой] мере удовлетворять все перечисленные выше практические требования, предъявляемые к плоскостному изображению трехмерного пространства. В каждом из них выполнение одних требований происходит за счет ухудшения других. Поэтому выбор того или иного метода изображения должен происходить в зависимости от решаемой на чертеже инженерной задачи.

§ 10. Параллельная аксонометрия

Произвольному прямоугольному при точке O' тетраэдру $O'A'B'C'$ (рис. 43) на плоскости чертежа H сопоставим четырехугольник $OABC$. Этим сопоставлением между пространством $\pi_1' \times \pi_2' \equiv X_{12}'$ и изображением $\pi_1 \times \pi_2 \equiv X_{12}$ установится аффинная связь

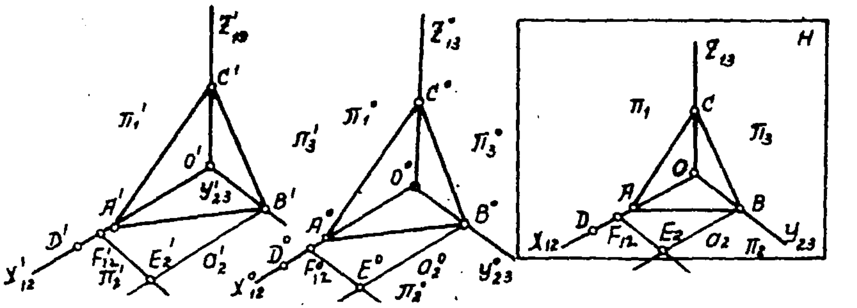


Рис.43

$$\pi_1'(A',O',C') \overset{\text{аф}}{\nearrow} \pi_1(A,O,C),\ \pi_2'(A',O',B') \overset{\text{аф}}{\nearrow} \pi_2(A,O,B) \cup X_{12}'(A',O') \overset{\text{аф}}{\nearrow} X_{12}(A,O). \quad (I)$$

На основании теоремы Польке-Шварца мы можем утверждать, что изображение $\pi_1 \times \pi_2 \equiv X_{12}$, построенное по соответствиям (I), является параллельной проекцией пространства $\pi_1^{\circ} \times \pi_2^{\circ} \equiv X_{12}^{\circ}$, подобного пространству $\pi_1' \times \pi_2' \equiv X_{12}'$.

Продолжим ребра $O'B'$, $O'C'$ и обозначим через Y_{23}', Z_{13}'. Введем аналогичные обозначения и для плоскости чертежа H. Прямые X_{12}', Y_{23}' и Z_{13}' назовем координатными осями, а их изображения X_{12}, Y_{23} и Z_{13} – аксиометрическими осями.

Очевидно, из соответствий (I) следует аффинная коллинеация грани $\Pi_3'(O',B',C')$ и его изображения на H поля $\Pi_3(O,B,C)$

$$\Pi_3'(O',B',C') \overset{a\varphi}{\wedge} \Pi_3(O,B,C). \qquad (2)$$

также и аффинное соответствие координатных и аксонометрических осей

$$X_{12}'(O',A') \overset{a\varphi}{\wedge} X_{12}(O,A),\ Y_{23}'(O',B') \overset{a\varphi}{\wedge} Y_{23}(O,B) \text{ и } Z_{13}'(O',C') \overset{a\varphi}{\wedge} Z_{13}(O,C). \qquad (3)$$

Определим отношения:

$$\frac{OA}{O'A'} = \ell_x,\quad \frac{OB}{O'B'} = \ell_y \quad \text{и} \quad \frac{OC}{O'C'} = \ell_z.$$

Числа ℓ_x, ℓ_y и ℓ_z называются коэффициентами искажений по аксонометрическим осям X_{12}, Y_{23} и Z_{13}.

Покажем, что отношение изображения произвольного отрезка принадлежащего какой либо оси к самому отрезку есть постоянная величина и равна коэффициенту искажения этой оси.

Действительно, пусть $O'D'$ принадлежит оси X_{12}', а его изображение на плоскость H по (I) есть отрезок OD принадлежащий X_{12}. В силу аффинности (3) прямолинейных рядов точек $X_{12}'(O'A') \overset{a\varphi}{\wedge} X_{12}(O,A)$ имеем равенство простых отношений троек точек:

$$\frac{D'O'}{O'A'} = \frac{DO}{OA} \qquad \text{или} \qquad \frac{OA}{O'A'} = \frac{OD}{O'D'} = \ell_x. \qquad (4)$$

Более того, можно показать, что коэффициенты искажения отрезков параллельных аксонометрической оси X_{12}, также равны ℓ_x. Например, отрезок BE_2 прямой a_2, параллельной оси X_{12}, образует параллелограмм OBE_2F_{12}, которому по соответствиям (I) в пространстве соответствует прямоугольник $O'B'E_2'F_{12}'$. Но из (4) следует равенство $\ell_x = \frac{OF_{12}}{O'F_{12}'} = \frac{OE_2}{O'E_2'}$, чем и доказывается наше утверждение. Так как аксонометрическая ось X_{12} была выбрана произвольно, доказанное справедливо и для остальных двух аксонометрических осей Y_{23} и Z_{13}.

Аксонометрические оси $X_{12} Y_{23}, Z_{13}$ вместе с коэффициентами искажений ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z называются <u>аксонометрической системой</u>. Таким образом, в результате приведенных выше рассуждений заключаем, что соответствия (I) на плоскости проекций H определяют аксонометрическую систему.

Справедливо и обратное утверждение.
Произвольно заданная на плоскости проекций H аксонометрическая система $X_{12}, \ell_x, Y_{23} \ell_y, Z_{13} \ell_z$ определяет единственные соответствия (I).

Действительно, если $X_{12}, Y_{23}, Z_{13}, \ell_x, \ell_y, \ell_z$ (рис.43) выбранная на плоскости проекции H аксонометрическая система с произвольными отрезками OA, OB и OC, то на прямоугольных координатных осях $X'_{12}, Y'_{23}, Z'_{13}$ всегда возможно подобрать такие отрезки $O'A', O'B'$ и $O'C'$, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{OA}{O'A'} = \ell_x, \quad \frac{OB}{O'B'} = \ell_y \quad и \quad \frac{OC}{O'C'} = \ell_z . \qquad (4)$$

Согласно теореме Польке-Шварца, четырехугольник $OABC$ явится параллельной проекцией тетраэдра подобного прямоугольному тетраэдру $O'A'B'C'$. Следовательно, равенства (4) определяют искомые соответствия (I).

<u>Итак, произвольная аксонометрическая система начерченная на плоскости чертежа может расматриваться как аффинное отображение прямоугольной координатной системы пространства.</u>

Основываясь на этом утверждении, можно максимально упростить переход от пространства к его плоскостному изображению и все те позиционные и метрические пространственные построения, выполнимость которых на плоскости чертежа была показана в предыдущей главе. Теперь уже принципиальная разрешимость любой пространственной задачи на плоскости чертежа должна рассматриваться и с точки зрения практической выполнимости необходимых для этого графических построений. В связи с этим точки,прямые и плоскости на инженерном чертеже изображаются в соответствии с требованиями перечисленными в § 9, а не произвольно, как это делали раньше. Однако в поисках упрощений мы должны исходить из общих принципиально выполнимых построений, справедливость которых была доказана в главе I.

На плоскости H выберем произвольную аксонометрическую систему $X_{12}, Y_{23}, Z_{13}, \ell_x, \ell_y, \ell_z$ и сопоставим ей прямоугольную координатную систему $X'_{12}, Y'_{23}, Z'_{13}$ в пространстве. Каждой точке пространства, например M' (рис.44) отнесенной к координатной системе $X'_{12}, Y'_{23}, Z'_{13}$ соответствует единственная прямоугольная призма $M'M'_1M'_xM'_2M'_yO'M'_zM'_3$. Вершины M'_1, M'_2, M'_3 являются ортогональными проекциями точки M' на координатные

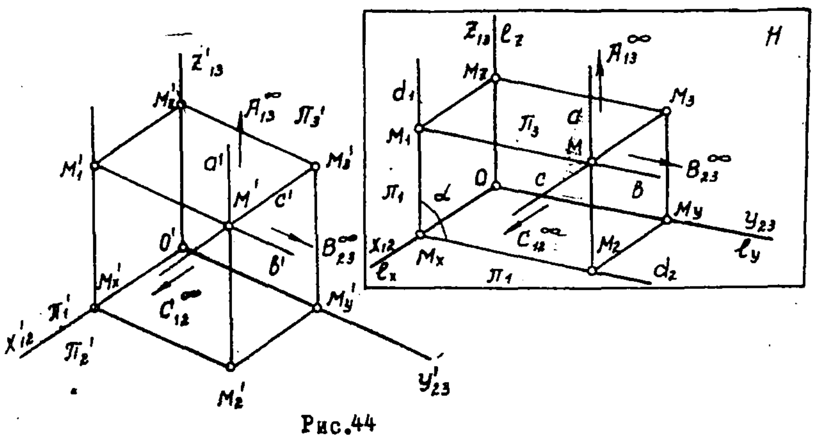


Рис.44

поля Π_1', Π_2', Π_3', отрезки же $O'M_x', O'M_y'$ и $O'M_z'$ – прямоугольными координатами этой точки на осях $X_{12}', Y_{23}', Z_{13}'$.

Используя соотношения (4), легко построить на H изображение призмы $M'M_1'M_x'M_2'M_y'O'M_z'M_3'$, по соотношениям

$$\frac{OM_x}{O'M_x'} = \ell_x, \quad \frac{OM_y}{O'M_y'} = \ell_y, \quad \frac{OM_z}{O'M_z'} = \ell_z.$$

Из этих соотношений находим длины изображений координат точки

$$OM_x = \ell_x \cdot O'M_x', \quad OM_y = \ell_y \cdot O'M_y' \quad \text{и} \quad OM_z = \ell_z \cdot O'M_z'.$$

Отложив вычисленные длины соответственно на аксонометрических осях X_{12}, Y_{23} и Z_{13}, получим точки M_x, M_y, M_z, являющиеся изображениями точек M_x', M_y' и M_z'. Теперь уже построение изображения всей призмы осуществляется легко, если вспомним, что оно получается параллельным проектированием на плоскость H призмы подобной призме $M'M_1'M_x'M_2'M_y'O'M_z'M_3'$, и что при этом параллельность прямых сохраняется.

Действительно, если из точек M_x и M_y проведем прямые, параллельные осям Y_{23} и X_{12}, то в пересечении они определят точку M_2 – изображение точки M_2'. Параллелограмм же $OM_xM_2M_y$ явится изображением прямоугольника $O'M_x'M_2'M_y'$. Аналогично построим точки M_1, M_3 и параллелограмы $OM_xM_1M_z$ и $OM_zM_3M_y$ – изображения точек M_1', M_3' и параллелограмов $O'M_x'M_1'M_z'$ и $O'M_z'M_3'M_y'$. Далее, из точек M_1 и M_2 проведем прямые, параллельные осям Y_{23} и Z_{13}, пересекающиеся в точке M и определяющие параллелограм $M_xM_1MM_2$ – изображение прямоугольника $M_x'M_1'M'M_2'$. И наконец точками M и M_3 определится отрезок MM_3 параллельный оси X_{12} – изображение отрезка $M'M_3'$, параллельного оси X_{12}'. Итак, мы получили плоскую фигуру $MM_1M_xM_2M_yOM_zM_3$ – изображение координатной прямоугольной призмы $M'M_1'M_x'M_2'M_y'O'M_z'M_3'$ точки M'. На изображенной фигуре точка M – изображение самой точки M', она называется аксонометрической проекцией точки M'. Точки же M_1, M_2, M_3 являются изображениями прямоугольных проекций точек $M_1' M_2' M_3'$. Поэтому они называются вторичными проекциями точки M на полях Π_1, Π_2 и Π_3.

Из чертежа 44 и приведенных выше рассуждений ясно, что для построения на H аксонометрической проекции M нет необходимости строить изображение всей прямоугольной координатной призмы. Достаточно построить изображение лин. $OM_x M_2 M$ координатной ломаной $O'M_x' M_2' M'$ или один из параллелограммов ,например $M_1 M_x M_2 M$– изображение прямоугольника $M_1' M_x' M_2' M'$.

Аналогично точке M', может быть отображена каждая точка пространства и построено изображение всего пространства. Оно идентично отображению построенному по соответствиям (I), и поэтому однозначное , т.е. каждой аксонометрической проекции точки соответствует единственная точка в пространстве. Однако следует особо упомянуть,что в таком случае непременно должна быть указана координатная ломаная или данные определяющие эту ломаную. Например, по одной аксонометрической проекции без ломаной $OM_x M_2 M$ мы не сможем построить соответственную ей точку M' в пространстве При наличии же этой ломаной координаты искомой точки M' определяются из соотношений

$$O'M_x' = \frac{OM_x}{\ell_x}, \quad M_x'M_2' = \frac{M_x M_2}{\ell_y}, \quad M_2'M' = \frac{M_2 M}{\ell_z}.$$

Но координатная ломаная определяется и заданием при точке M одной из вторичных проекций M_1, M_2, M_3 или же какой-либо пары вторичных проекций $(M_1,M_2)(M_2,M_3)$ и (M_1,M_3). Например, если при точке M задана только вторичная проекция M_2, то проведением прямой d_2 параллельно оси Y_{23} до пересечения оси X_{12} в точке M_x определяется ломаная MM_2M_xO. Если же заданы вторичные проекции M_1 и M_2, аксонометрическая проекция M определяется пересечением прямых a и b, проведенных параллельно осям Y_{23} и Z_{13}.

Все вышеуказанное относительно определения аксонометрической проекции M, представляет собой подбор частного расположения прямых, определенных основными полями Π_1 и Π_2, которыми в главе I определялись точки на изображении $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$. В самом деле, при заданных аксонометрической проекции M и вторичной M_2 мы фактически задаем прямую a точками M_2 и A_{12}^{∞} на основных полях Π_2 и Π_1 и затем на этой прямой берем точку M. Задавая же вторичные проекции M_1 и M_2, точку M определяем пересечением прямых a и b определенных точками M_2, A_1^{∞} и M_1, B_2^{∞} принадлежащими плоскому полю $\mathcal{L}(d, d_2)$. Поэтому на аксонометрическом изображении могут быть применены все основные пространственные позиционные и метрические построения выполненные нами в I главе в общей форме на произвольном проекционном изображении. Однако ввиду перпендикулярности основных полей Π_1' и Π_2' и координирования точек пространства специально подобранными прямыми, на аксонометрическом изображении основные пространственные построения, как увидим ниже, значительно упрощаются.

Прежде всего следует заметить, что основным элементом любого инженерного чертежа, в том числе и аксонометрического, является точка. Прямые и плоскости преимущественно изображаются с помощью точек. В первой главе, стремясь к общности в изложении в ущерб простоте построений, все элементы пространства мы считали равноправными.

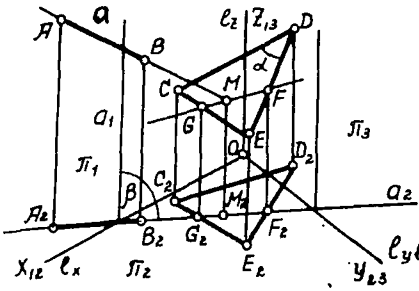


Рис. 45

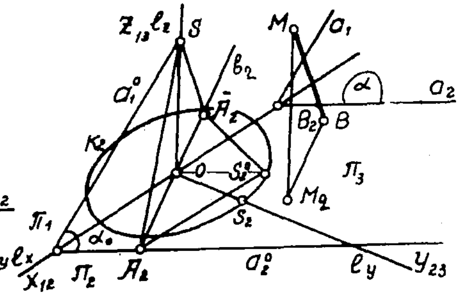


Рис.46

Например, изображенные в некоторой аксонометрической системе (рис.45) $X_{12}, Y_{23}, Z_{13}, \ell_x, \ell_y, \ell_z$ две точки $A(A_2)$ и $B(B_2)$ определяют отрезок $AB(A_2B_2)$ определяющий в свою очередь прямую $a(a_2)$. Три точки $C(C_2), D(D_2), E(E_2)$ не лежат на одной прямой, так как вторичная проекция E_2 не расположена на прямой C_2D_2, являющейся проекцией прямой CD на основное поле Π_2. Следовательно определяется треугольник $CDE(C_2D_2E_2)$, задающий плоскость α

Можно построить точку встречи прямой $a(a_2)$ с плоскостью α. Четырехугольник A_2ABB_2 со сторонами A_2A и B_2B, параллельными оси Z_{13}, определяет плоскость $\beta(a_1, a_2)$, параллельную этой оси и, стало быть, перпендикулярную плоскости Π_2. Если из точек G_2 и F_2, где прямая a_2 пересекает стороны треугольника $C_2D_2E_2$ провести прямые параллельные оси Z_{13}, до встречи с отрезками CE и DE, то определится прямая $GF(G_2F_2)$ — пересечение плоскостей β и α. Прямые $a(a_2)$ и $GF(G_2F_2)$ лежат в плоскости $\beta(a_1, a_2)$ и пересекаются в искомой точке $M(M_2)$

Как видно из чертежа и по проведенным рассуждениям, позиционные построения на аксонометрическом чертеже нагляднее и проще по сравнению с соответствующими построениями, выполненными в первой главе.

Сравнительно проще осуществляются метрические построения Пусть, например, в произвольной аксонометрической системе $X_{12}, Y_{23}, Z_{13} (\ell_x, \ell_y, \ell_z)$ (рис.46) из точки $M(M_2)$ следует опустить перпендикуляр на плоскость $\alpha(a_1, a_2)$. Как нам уже известно из первой главы, для этого сперва на плоскости чертежа надо изобразить полярную связку проектирующую абсолютный поляритет, и пересекающуюся с плоскостью Π_2 по круговому поляритету с мнимой фундаментальной окружностью. Построив на Π_2 "окружность" (т.е. эллипс) K_2 "радиусом" OS_2, "равным" отрезку OS поляритет в связке (S) будет определен. Далее, через S проводим плоскость $\alpha_0(a_1^0, a_2^0)$, параллельную данной плоскости $\alpha(a_1, a_2)$. Прямая b_2, сопряженная с прямой OS_2^0 по эллипсу K_2, в пересечении с прямой $S_2^0 \bar{A}_2$, сопряженной с направлением $A_2 S_2^0$, определяет точку $\bar{A}_2$, соответственную в эллиптической инволюции точке A_2. Поэтому прямая $S\bar{A}_2 (O\bar{A}_2)$ будет изображением перпендикуляра к плоскости $\alpha_0 (a_1^0, a_2^0)$. Следовательно, прямая $MB (M_2 B_2)$ параллельная прямой $S\bar{A}_2 (O\bar{A}_2)$, явится искомым перпендикуляром, проходящим через $M (M_2)$ перпендикулярно к данной плоскости $\alpha (a_1, a_2)$. В первой главе для отыскания отрезка SO, ввиду отсутствия перпендикулярности полей Π_1 и Π_2, нам пришлось выполнить дополнительные построения.

Таким образом, благодаря перпендикулярности в пространстве осей X_{12}, Y_{23}, Z_{13}, специальной координации точек и подбора коэффициентов искажений, на аксонометрическом изображении в построениях получены определенные упрощения.

Однако с точки зрения практической применимости они все еще остаются сложными. В особенности метрические построения, в которых вместо окружностей используются эллипсы.

Дальнейшие упрощения достигаются путем специального подбора значений показателей искажений и углов между аксонометрическими осями.

Как было установлено, аксонометрическая система на плоскости чертежа может быть выбрана совершенно произвольно. Это следствие из теоремы Польке-Шварца положено в основу дальнейших упрощений построений в аксонометрических изображениях.

По значениям показателей искажений различают три вида аксонометрических изображений:

I. Триметрическое - все три показателя искажения различны;

2. Диметрическое - два показателя искажения равны:

$$(\ell_x = \ell_y \neq \ell_z), (\ell_x \neq \ell_y = \ell_z)(\ell_x = \ell_z \neq \ell_y);$$

3. Изометрическое - все три показателя искажения равны $\ell_x = \ell_y = \ell_z$.

Практически для упрощения перемножения натуральных длин координат на показатели искажения берутся самые простые числа 1 или $0,5$

Если аксонометрическая система на плоскости чертежа выбрана так, что она представляет непосредственную параллельную проекцию прямоугольной координатной системы пространства (коэффициент подобия $S_k = 1$), то тогда коэффициенты искажения ℓ_x, ℓ_y и ℓ_z и угол проектирования φ связаны соотношением

$$\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2\varphi}.$$

Действительно, пусть прямоугольная координатная система X, Y, Z (рис.47) пространства спроектирована на плоскость проекций под углом проектирования ε в аксонометрические оси X_1, Y_1, Z_1 с коэффициентами $\ell_x = \frac{AO_1}{AO'}$, $\ell_y = \frac{BO_1}{BO'}$ и $\ell_z = \frac{CO_1}{CO'}$.

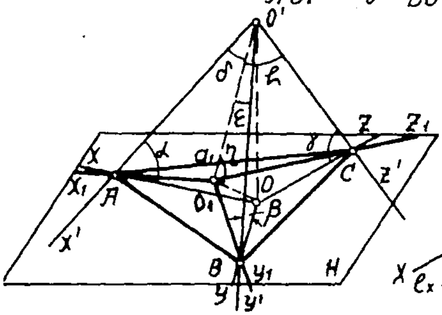


Рис.47

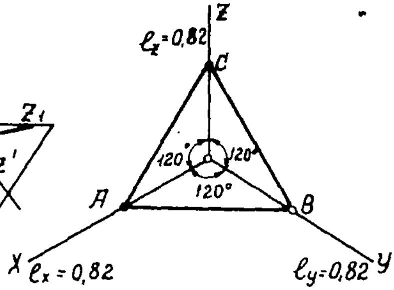


Рис.48

Координатные оси X', Y', Z' с плоскостью проекций H составляют углы α, β и γ , а с проектирующей прямой $O'O_1$ углы δ, ε и η .

Если $O'O$ перпендикуляр, опущенный из O' на плоскость H, то пр прямоугольному треугольнику O_1OO' имеем

$$O'O = O'O_1 \cdot \sin \varepsilon . \tag{I}$$

Но из прямоугольного треугольника AOO' следует, что

$$O'O = O'A \sin \alpha .$$

Приравнивая правые стороны этих равенств получим

$$O'O_1 \cdot \sin \varepsilon = O'A \cdot \sin \alpha \quad O'O_1 = O'A \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon} . \tag{2}$$

Из косоугольного же треугольника AO_1O' можно получить

$$O_1A^2 = O'A^2 + O'O_1{}^2 - 2\, O'A \cdot O'O_1 \cdot \cos \delta . \tag{3}$$

Подставив в (3) значения $O'O_1$ по (2) получим

$$O_1A^2 = O'A^2 + O'A^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \varepsilon} - 2\, O'A^2 \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon} \cdot \cos \delta ;$$

$$\frac{O_1A^2}{O'A^2} = \ell_x^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \varepsilon} - 2\, \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon} \cdot \cos \delta . \tag{4}$$

Аналогично получим значения показателей искажений e_y и e_z

$$l_y^2 = 1 + \frac{\sin^2\beta}{\sin^2 z} - 2\frac{\sin\beta}{\sin z}\cdot\cos\varepsilon;$$

$$l_z^2 = 1 + \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 z} - 2\frac{\sin\gamma}{\sin z}\cdot\cos\varphi. \qquad (5)$$

Сложением равенства (4) и (5) получим

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 3 + \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{\sin^2 z} - 2\,\frac{\sin\alpha\cdot\cos\delta + \sin\beta\cdot\cos\varepsilon + \sin\gamma\cdot\cos\varphi}{\sin z} \qquad (6)$$

Можно показать, что:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1;$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\delta + \sin\beta\cdot\cos\varepsilon + \sin\gamma\cdot\cos\varphi = \sin z \qquad (7)$$

После внесения значений по (4) в (5) окончательно будем иметь

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2 z}. \qquad (8)$$

По углу проектирования косоугольные аксонометрические системы отличаются от ортогональных аксонометрических систем. Из равенства (8) следует, что для ортогональных аксонометрических систем показатели искажений связаны соотношением

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 2. \qquad (9)$$

Однако не следует забывать, что соотношения (8) и (9) имеют место в аксонометрических системах, полученных непосредственным проектированием прямоугольной координатной системы на плоскость проекций H .

При прямоугольной изометрической аксонометрии должно удовлетворяться требование $l_x = l_y = l_z$. Тогда по соотношению (9) получим

$$3l_x^2 = 2 \quad l_x = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cong 0{,}82.$$

Определим углы между аксонометрическими осями. Равенство коэффициентов означает, что углы наклона α, β, γ координатных осей

X', Y', Z' (рис.47) к плоскости проекций H также должны быть равными. Поэтому треугольник ABC, по которому плоскость H пересекает координатный трехгранник, будет равносторонним. Но аксонометрические оси являются высотами этого треугольника (он называется главным треугольником следов плоскости H). Следовательно (рис.48) в прямоугольной изометрии аксонометрические оси составят равные углы по 120°.

В случае же диметрической прямоугольной аксонометрии, с учетом требования $\ell_x = \ell_z = 2\ell_y$, по формуле (8) получим следующие значения показателей искажений:

$$(2\ell_y)^2 + (2\ell_y)^2 + \ell_y^2 = 2 \quad \text{или} \quad \ell_y = \frac{\sqrt{2}}{3} \cong 0{,}47,\ \ell_x = 0{,}94,\ \ell_z = 0{,}94 \qquad (10)$$

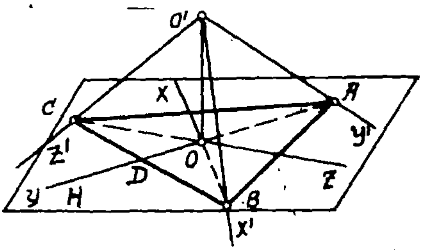


Рис.49

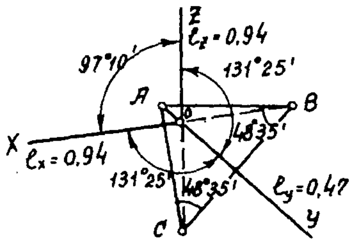


Рис.50

Определим теперь углы между аксонометрическими осями;заметим что (рис.49) треугольник $CO'B$ равнобедренный, с прямым углом при вершине O'. **Поэтому из равенства** $O'B^2 + O'C^2 = CB^2$ **можем получить** значение $CB = \sqrt{2} \cdot O'B$, где $O'B = \frac{OB}{\ell_x}$. Подставив это значение, имеем $CB = \sqrt{2}\,\frac{OB}{\ell_x}$, откуда $OB = \frac{CB \cdot \ell_x}{\sqrt{2}}$ или $OB = \frac{CB}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = CB \cdot \frac{2}{3}$.
С другой стороны из прямоугольного треугольника ODB имеем, что $\sin \angle BOD = \frac{BD}{OB}$. Подставляя значения $BD = \frac{CB}{2}$ и $OB = CB\,\frac{2}{3}$, получим $\sin \angle BOD = \frac{CB}{2} : \frac{2CB}{3} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. По этому значению синуса находим $\angle BOD = 48^{\circ}35'$. Углы $\angle BOD$ и $\angle ACB$ имеют перпендикулярные стороны и следовательно $\angle BOD = \angle ACB = 48^{\circ}35'$.

Теперь уже на плоскости чертежа (рис.50) оси диметрии ортогональной аксонометрии можно начертить как высоты равнобедренного треугольника ABC с углами, равными $48^{\circ}35$ при вершинах B и C. Углы между осями будут $\angle XOZ = 97^{\circ}10'$, $\angle XOY = \angle ZOY = 131^{\circ}25'$.

Практическое значение ортогональных аксонометрических систем заключается в возможности упрощения графических построений при изображении на чертежах окружностей и шаровых поверхностей.

Дальнейшие, и основные, упрощения в построениях достигаются путем соответствующего подбора значений углов между осями косоугольных аксонометрических систем. Произвольность этого подбора, как нами было уже установлено, следует из теоремы Польке-Шварца.

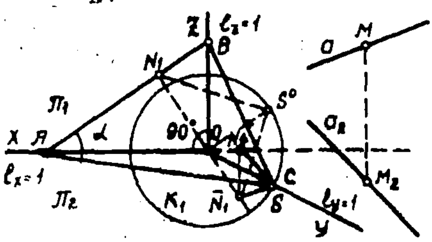


Рис.51

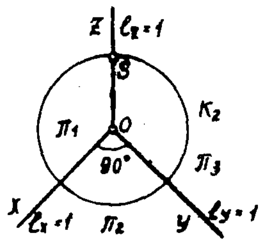


Рис.52

В инженерной практике используются косоугольные аксонометрические системы с прямым углом между какой-либо пары осей. Например, на чертеже 51 угол $XOZ = 90$. Такие аксонометрические системы называются фронтальными. В частности фронтальной изометрией если $\ell_x = \ell_y = \ell_z = 1$, и фантальной диметрией, если $\ell_x = \ell_z = 1$, а $\ell_y = 0{,}5$.

В случае же перпендикулярности осей $X \perp y$ (рис.52) аксонометрическая система называется военной перспективой. При этом, если $\ell_x = \ell_y = \ell_z = 1$, то будем иметь изометрию военной перспективы, а если $\ell_y = \ell_y = 1$ и ℓ_x $\ell_z = 0{,}5$, диметрию военной перспективы.

Совершенно очевидно, что оба вида акмонометрических систем геометрически идентичны и ввиду равенства полей, в одном случае π_1' и π_1, а в другом π_2' и π_2 являются непосредственными параллельными проекциями прямоугольной координатной системы X', Y', Z' пространства. Поэтому по формуле (8) могут быть высчитаны значения углов проектирования.

При изометриях фронтальной и военной перспективы можем написать, что $1^2 + 1^2 + 1^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2 \eta}$, откуда $\sin \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\eta = 45°$.

В случае диметрии тех же аксонометрических систем, будем иметь $1^2 + 1^2 + 0{,}5^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2 \zeta}$. Отсюда $\sin \zeta = \frac{1}{\sqrt{1.25}}$ или $\zeta \cong 63°26'$

Таким образом, изображение пространства, построенное в какой либо из указанных аксонометрических систем, явится его параллельной проекцией под углом проектирования $\zeta = 45^0$ либо $\zeta = 63^0 26'$.

Упрощения в построениях происходит за счет равенства аффинно соответственных полей при фронтальной аксонометрии $\pi_1' \frac{\sigma\phi}{\lambda} \pi_1$ и при военной перспективе $\pi_2' \frac{\sigma\phi}{\lambda} \pi_2$.

Эти поля или параллельные им плоскости на плоскости чертежа изображаются без искажения и поэтому во многих случаях окружности пространства проектируются опять-таки в виде окружностей, т.е. построения выполняются циркулем и линейкой. Это обстоятельство особенно важно при выполнении метрических построений. Например, во фронтальной аксонометрии (рис.51). Пусть из точки $M(M_1)$ следует опустить перпендикуляр на плоскость $\alpha(ABC)$.

Для этого, как мы уже знаем, необходимо построить полярную связку, проектирующую абсолютный поляритет, и найти в этой связке прямую, полярно сопряженную с плоскостью, параллельной данной плоскости. Но данную плоскость $\alpha(ABC)$ можно представить как плоскость полярной связки, если ее центр S' совместить с точкой C. Тогда для построения искомого перпендикуляра из O радиусом OS' описываем окружность K_1. Проводим через O к AB перпендикулярную прямую и на ней при помощи прямоугольного треугольника $N_1 S^\circ \bar{N}_1$, строим точку $\bar{N}_1$, инволюционно сопряженную с точкой N_1. Мы знаем, что прямая $S'\bar{N}_1(S'N_2)$ есть изображение прямой, перпендикулярной в пространстве плоскости, изображением которой на чертеже является плоскость $\alpha(ABC)$. Прямая $a(a_2)$, проходящая через $M(M_2)$ параллельно прямой $S\bar{N}_1$, представляет собой искомый перпендикуляр, опущенный на данную плоскость $\alpha(ABC)$.

В общем случае аксонометрии окружность K_1 была представлена эллипсом и построения, как мы уже убедились, были сложными. В военной перспективе (рис.52) те же построения выполняются при помощи центра связки S и окружности K_2.

Таким образом, в вышерассмотренных частных случаях общей аксонометрии одна из координатных полей π_1' и π_2' изображается без искажения. Однако в силу этой же произвольности выбора аксоно-

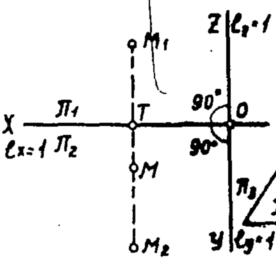


Рис.53

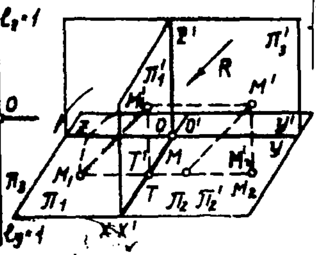


Рис.54

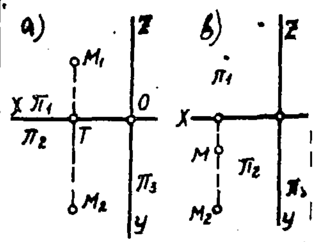


Рис.55

метрических осей и коэффициентов искажений, мы можем под прямым углом взять две пары аксонометрических осей (рис.53) $X \perp Z$ и $X \perp Y$ с коэффициентами $\ell_x = \ell_y = \ell_z = 1$. Это будет соответствовать параллельному проектированию (рис.54) координатных осей X', Y', Z' опять по направлению R под 45^0 к плоскости проекции H, но параллельному координатной плоскости Π_3'. При этом координатная плоскость Π_2' совпадает с основным полем Π_2. Поэтому и оси X' и Y' совпадают с осями X и Y. Каждая точка M' с проекциями M_1' и M_2', на чертеже изобразится аксонометрической M и втичными M_1, M_2 проекциями расположенными на одном отрезке $M_1 M_2$ перпендикулярном оси X, представляющем проекцию прямоугольника $M'M_1'T'M_2'$. Очевидно, что $MM_2 = M'M_2'$, $M_1T = M_1'T'$ и $MM_1 = M'M_1'$. В силу этого на чертеже будем иметь равенство отрезков $M_2M = TM_1$ и $M_2T = MM_1$. Построенные в этом виде аксонометрической системы координатные плоскости Π_1' и Π_2' изображаются без искажения в основные поля Π_1 и Π_2, ввиду чего построения на чертеже получаются наипростейшими. Поэтому они широко используется в инженерном деле и является основным методом изображения.

Выше было отмечено, что на аксонометрическом изображении точка определяется двумя вторичными или аксонометрической и одной из вторичных проекций. В обоих случаях изображение точки однозначно соответствует точке пространства. Поэтому изображение можно строить по двум вторичным проекциям M_1, M_2 каждой точки (рис. 55а) или же по аксонометрической M и одной вторичной проекции (рис.55-в). В первом случае – способ изображения называется <u>методом Монжа</u>, во втором же – <u>методом Федорова</u>.

Таким образом, аксонометрическая система, показанная на чертеже 53, может рассматриваться как слияние методов <u>Федорова и Монжа</u>. Следует заметить, что метод Монжа может быть получен и вращением (рис.54) плоскости π'_1 вокруг оси X' до совмещения с основным полем π_1. Результат получится такой же, как при проектировании по направлению R. Проекция M'_1 совместится со вторичной проекцией M_1, которая с проекцией M_2 оказывается на одном перпендикуляре M_1M_2 к оси X. Таким путем был получен этот метод самым Гаспаром Монжем и в настоящее время, после полутора века, в любом учебнике или научном исследовании метод Монжа истолковывается, как результат указанного совмещения. Хоть результат и тот жё, однако проектированием он связывается с общими способами параллельного проектирования, как частный случай имеющий перед другими свои большие практические преимущества.

Мы не будем показывать этих преимуществ, решением различных задач методом Монжа, как то: построения на точку, прямую и плоскость- способы совмещения, вращения и перемены плоскостей проекций, изображение многогранников, поверхностей, их пересечение с плоскостями, прямыми, взаимные пересечения и т.д. Все это является предметом проекционного черчения и подробно изложены в любом учебнике по начертательной геометрии, предназначенном для технических ВУЗ-ов.

Приведем лишь один основной пример на построение перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

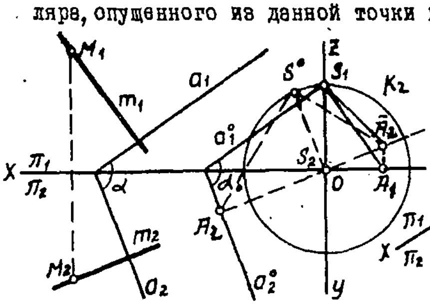


Рис.56

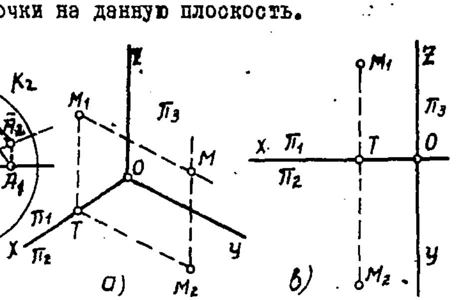


Рис.57

Пусть из точки (M_1, M_2) следует опустить перпендикуляр на плоскость $\alpha(a_1, a_2$ (рис.56). Для этого надо построить полярную связку и затем найти прямую, полярно сопряженную с плоскостью $\alpha_0(a_1^\circ a_2^\circ)$, параллельной данной плоскости $\alpha(a_1, a_2)$. Из аналогичных построений военной перспективы и фронтальной изометрии, мы уже знаем, как найти искомую прямую $S_1\bar{A}_1$: надо построить круг K_2 и на перпендикулярной прямой $A_2\bar{A}_2$ к a_2° построить прямоугольный треугольник $A_2 S^\circ \bar{A}_2$. Вершина $\bar{A}_2$ определит искомую $S_2\bar{A}_2$. Прямые $S_1 A_1$ и $S_2\bar{A}_2$ будут проекциями этой прямой на основные поля π_1 и π_2. Таким образом получим, что проекция $S_2\bar{A}_2$ на плоскость π_2 перпендикулярна к основной прямой a_2° плоскости α_0. Совершенно аналогично докажем перпендикулярность проекции $S_1 A_1$ к прямой a_1°. Следовательно, проекциями прямой проходящей через точку $M(M_1, M_2)$ перпендикулярно к плоскости $\alpha(a_1, a_2)$ будут перпендикуляры m_1, m_2 опущенные на прямые a_1 и a_2.

Мы убеждаемся, что это построение, по сравнению с аналогичными построениями, выполненными нами в других случаях аксонометрических систем, наипростейшее.

Однако упрощение построения методом Монжа сопровождается ухудшением наглядности в смысле созерцания пространственности по изображению, что также весьма важно для инженерных чертежей. Это ухудшение происходит за счет максимального искажения изображения π_3 на чертеже координатной плоскости π_3'. Это поле вырождается в прямую (рис.57) yoz. Поэтому прямой угол $M_1'T'M_2'$ в пространстве в произвольной аксонометрии изображается в виде угла M_1TM_2 (рис.57а) сторонами, параллельными осям Z и Y. Этот угол, который в методе Монжа изображается отрезком M_1TM_2 (рис.57 в), перпендикулярным оси X. Ухудшению наглядности способствует также раздвоение изображаемого пространства в проекции на основные поля Π_1 и Π_2.

§ II. Центральная аксонометрия

В основу центральной аксонометрии, аналогично параллельной аксонометрии, лежит основное предложение центрального проектирования. Мы его доказали в § 7 для произвольных пространственной и плоской дезарговых конфигураций. Там же был указан способ построения на чертеже плоской дезарговой конфигурации являющейся центральной проекцией пространственной дезарговой конфигурации.

Теперь, исходя из общих положений изложенных в указанном параграфе и преследуя практические цели, мы будем подбирать частные случаи дезарговых конфигураций, упрощающие построения на плоскости чертежа. В соответствии соображениям, изложенным в § 7, ребра x', y', z' пространственной конфигурации возьмем взаимно перпенди-

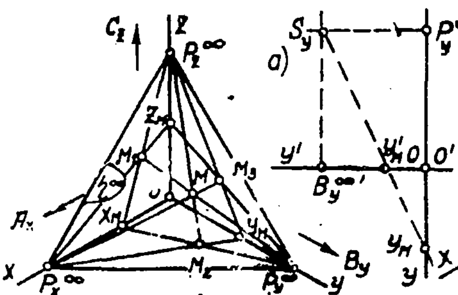


Рис.58

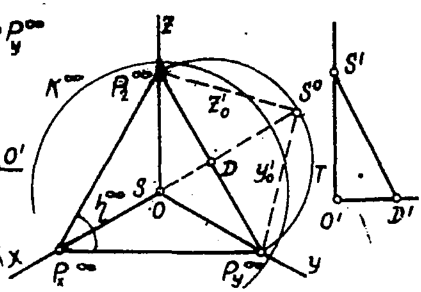


Рис.59

кулярными. Сечение $A'B'C'$ этих ребер с плоскостью одинаково наклона к ним, очевидно будет равносторонним треугольником. На плоскости чертежа (рис.58) построим произвольный равносторонний треугольник $P_x^\infty P_y^\infty P_z^\infty$ с высотами XO, YO и ZO, принятыми за аксонометрические оси. Если теперь X', Y' и Z' принять за прямоугольную координатную систему пространства и несобственным точкам $P_x'^{\infty}$, $P_y'^{\infty}$, $P_z'^{\infty}$ координатных осей сопоставить точки P_x^{∞}, P_y^{∞}, P_z^{∞} на чертеже, несобственным точкам A_x, B_y, C_z аксонометрических осей-точки A_x', B_y', C_z' на координатных осях, а точке их пересечения O, пересечение осей X', Y', Z' точку O', то получим соответствия

$$
\begin{aligned}
&X(O, P_x^{\infty} A_x) \,\overline{\wedge}\, X'(O', P_x'^{\infty}, A_x');\\
&Y(O, P_y^{\infty}, B_y) \,\overline{\wedge}\, Y'(O', P_y'^{\infty}, B_y');\\
&Z(O, P_z^{\infty}, C_z) \,\overline{\wedge}\, Z'(O', P_z'^{\infty}, C_z').
\end{aligned}
\qquad (I)
$$

Заметим, что так как треугольники $P_x^{\infty} P_y^{\infty} P_z^{\infty}$ на плоскости чертежа и $A_x' B_y' C_z'$ в пространстве равносторонние, то имеем равенство отрезков $P_x^{\infty}O = P_y^{\infty}O = P_z^{\infty}O$ и $A_x'O' = B_y'O' = C_z'O'$ и поэтому проективные соответствия рядов (I) идентичны.

Из § 7 известно построение изображений точек по (I). Пусть, например, в пространстве задана точка $M'(X_M', Y_M', Z_M')$. По соответствиям (I) находим изображения X_M, Y_M, Z_M координат X_M', Y_M', Z_M' и строим фигуру $M M_2 Y_M M_3 Z_M M_1 X_M O$ являющуюся изображением координатной призмы $M' M_2' Y_M' M_3' Z_M' M_1' O'$. Вершина M будет центральной проекцией точки M'. Так по точкам может быть построено изображение всего пространства.

Помимо известных числовых расчетов, по (I) координаты X_M, Y_M, Z_M могут быть построены и графически. Отдельно (рис. 58 а) на взаимно перпендикулярных прямых Y' и Y от точки их пересечения O откладываем отрезки OP_y^{∞} и $B_y'^{\infty}$. Пересечение перпендикуляров, восстановленных из P_y^{∞} и $B_y'^{\infty}$ к Y и Y', определит точку S_y. Для построения отрезка OY_M, координату $O'Y_M'$ точки M', отложенную по прямой Y', проектируем из S_y на прямую Y. Проекция OY_M будет искомым отрезком, который откладываем по аксонометрической оси Y от начала O. Ввиду идентичности соответствий (I) точка S_y может быть использована и для нахождения длин отрезков OX_M и OZ_M. После этого аксонометрическая проекция M строится при помощи „несобственных" точек $P_x^\infty, P_y^\infty, P_z^\infty$ (черт.58). Так по точкам может быть построена центральная проекция всего изображаемого пространства.

Не повторяя в центральной аксонометрии выполнение основных позиционных построений, аналогичных таким же построениям в параллельной аксонометрии, покажем решение задачи на перпендикулярность прямой и плоскости.

Прежде всего заметим, что по центральной аксонометрической системе (рис.59) с треугольником $P_x^\infty P_y^\infty P_z^\infty$, изображающим несобственную плоскость τ^∞, на чертеже всегда может быть определена длина перпендикуляра опущенного из центра проектирования на плоскость чертежа. Основанием указанного перпендикуляра является точка O. Если направлением оси X пересечь окружность T диаметром $P_y^\infty P_z^\infty$, то точка пересечения S° определит истинную величину $P_y^\infty S^\circ P_z^\infty$ прямоугольного треугольника $P_y^\infty S' P_z^\infty$. Искомая длина перпендикуляра будет катет $S'O'$ прямоугольного треугольника $D'O'S'$, гипотенуза $S'D'$ и катет $O'D'$ которого взяты по чертежу $S'D' = S^\circ D$ и $O'D' = OD$.

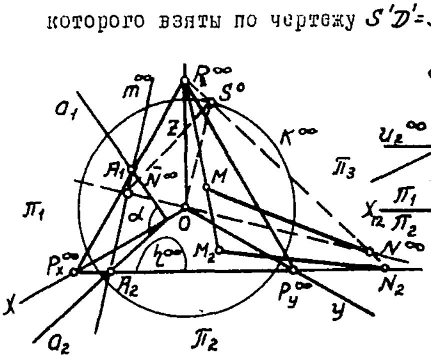


Рис.60

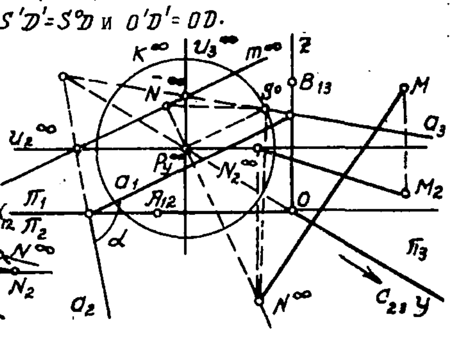


Рис.61

Пусть из точки $M(M_2)$ следует опустить перпендикуляр на плоскость $\alpha(a_1 a_2)$ (рис.60).

Вокруг точки O опишем окружность K^{∞} радиусом, равный длине перпендикуляра, опущенного из центра проектирования S' на плоскость чертежа, построенного только что указанным построением. Построим прямую пересечения m^{∞} данной плоскости $\alpha(a_1, a_2)$ с несобственной плоскостью $\tau^{\infty}(P_x^{\infty} P_y^{\infty} P_z^{\infty})$. При помощи окружности K^{∞} (называемой в инженерной практике дистанционной или окружностью расстояний) уже известным нам способом построим полярно сопряженную с прямой m^{∞} точку N^{∞}. Прямая $MN^{\infty}(M_2, N_2)$ является искомым перпендикуляром опущенным из точки $M(M_2)$ на плоскость $\alpha(a_1, a_2)$.

Дальнейших упрощений можно добиться основываясь на известном из § 7 задания коллинеаций $\pi_1' \barwedge \pi_1, \pi_2' \barwedge \pi_2$ основных полей, при котором изображение $\pi_1 \times \pi_2 \equiv X_{12}$ является центральной проекцией пространства $\pi_1' \times \pi_2' \equiv X_{12}'$. Как было установлено, для этого одна из коллинеаций должна представлять собой подобие. Мы возьмем частный случай подобия- равенство полей $\pi_1' \equiv \pi_1$. В соответствии с этим на плоскости чертежа (рис.6I) при помощи аксонометрических осей X, Y, Z определим основные поля π_1 π_2 и π_3. Коллинеацию $\pi_1' \barwedge \pi_1$ представим равенством рядов

$$X_{12}(0, A_{12}) \equiv X_{12}'(0', A_{12}') \text{ и } Z_{13}(0, B_{13}) \equiv (0', B_{13}')$$

коллинеацию же $\pi_2' \barwedge \pi_2$ соответствием рядов:

$$X_{12}(0, A_{12}) \equiv X_{12}'(0', A_{12}') \text{ и } Y_{23}(0, P_y^{\infty}, C_{23}) \barwedge Y_{23}'(0', P_y'^{\infty}, C_y')$$

Тогда несобственная плоскость τ^{∞} определится основными прямыми u_2^{∞} и u_3^{∞}. Она будет параллельная плоскости π_1. Радиус дистанционной окружности K^{∞} равен отрезку $0'C_y'$. Окружность K^{∞} должна быть описана вокруг точки P_y^{∞}, так как перпиндикуляр, опущенный из центра S' в пространстве параллелен координатной оси Y'.

Если, например, из точки $M(M_2)$ следует опустить перпендикуляр на плоскость $\alpha(a_1, a_2)$, то уже известными нам построениями находим полюс $N^{\infty}(N_2^{\infty})$ несобственной прямой π^{∞} плоскости $\alpha(a_1\, a_2)$ и проводим прямую $MN^{\infty}(M_2N_2^{\infty})$ которая и будет искомым перпендикуляром.

Рассмотренный частный случай центральной аксонометрии называется перспективой, прямая U_2^{∞} – линией горизонта, точка P_1^{∞} – главной точкой схода, поле π_1 – картинной плоскостью, прямая X_{12} – основанием картины и поле π_2 – предметной плоскостью.

Г Л А В А III

ПЛОСКОСТНАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 12. Сущность моделирования

Из первых двух глав нам уже известна возможность отображения пространства на плоскость-проектированием или коллинеарным преобразованием. В обоих случаях отображение характеризуется всеми свойствами трехмерного пространства. Мы убедились, что проектированием или преобразованием коллинеарно основные поля трехмерного пространства $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}'$ на плоскость изображений в поля $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$, на чертеже возможно выполнение всех позиционных и метрических пространственных построений, уже независимо от трехмерного пространства. При помощи основных полей $\Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$ изображение становится как бы самостоятельным плоскостным трехмерным пространством, можно сказать расплющенным в плоскость трехмерным пространством. Однако, эта независимость не абсолютная. Все наши суждения о пространственности изображения в первых двух главах основывались на однозначной связи трехмерного пространства и его изображения полученного проектированием $\Pi_1' \overline{\wedge} \Pi_1$, $\Pi_2' \overline{\wedge} \Pi_2$, $X_{12}' \overline{\wedge} X_{12}$ или коллинеарным преобразованием $\Pi_1' \times \Pi_2' \equiv X_{12}' \overline{\wedge} \Pi_1 \times \Pi_2 \equiv X_{12}$.

Естественно возникает вопрос- нельзя ли плоскостное трехмерное пространство построить прямо на плоскости чертежа, и абсолютно независимо от изображаемого трехмерного пространства? При этом так, чтобы на нем могли быть выполнены все пространственные позиционные и метрические построения.

Постановка такого вопроса приводит нас к необходимости плоскостного моделирования трехмерного пространства.

Сущность моделирования заключается в следующем: на плоскости чертежа выбирается произвольное множество элементов. Элементом могут быть любые образования, принадлежащие плоскости чертежа. Например, группа точек, группа прямых, плоские фигуры (треугольники, четырехугольники, окружности, эллипсы-вообще любые плоские кривые), преобразования (гомологии, коллинеации и вообще любые преобразования) и т.д. Короче говоря все что угодно ,лишь бы множество элементов принадлежало плоскости чертежа ,т.е. было плоскостным множеством элементов.

Затем перечисляются определения или интерпретации: "точек", "прямых" и " плоскостей" и их "отношения" , т.е. указывается, что называется "точкой", "прямой" и " плоскостью". Интерпретации "отношений" " совпадают", " различны"," принадлежит", "расположено", "равно" и т.д. перечисляются все те отношения, которыми характеризуются точки, прямые и плоскости трехмерного пространства.

Далее,пользуясь плоскостными свойствами выбранного множества элементов, в принятых интерпретациях доказывается выполнимость всех аксиом трехмерного пространства,после чего плоскостная модель трехмерного пространства считается построенной.

После этого можно утверждать,что в построенной модели могут быть выполнены все пространственные построения доказуемые аксиомами, выполнимость которых в принятой интерпретации уже доказана.

Таким образом, плоскостная модель трехмерного пространства представляет собой какое-либо плоскостное множество элементов (в указанном выше широком смысле) в принятой интерпретации, выполняющее аксиомы трехмерного пространства.

В дальнейшем плоскостную модель трехмерного пространства для краткости изложения мы будем иногда называть так же и расплющенным пространством.

Ниже будет построена плоскостная модель трехмерного проективного пространства при помощи множества гомологий с общей осью.

В соответствии с вышеизложенным при построении плоскостной модели трехмерного пространства могут быть использованы только плоскостные аксиомы и положения, доказуемые ими. Известно, что для построения проективной геометрии трехмерного пространства необходимы следующие три группы аксиом (Ефимов "Высшая геометрия", Москва, 1945 г.):

I I-9 аксиомы связи (принадлежности);

II I-6 аксиомы порядка ;

III I аксиома непрерывности (Дедекинда).

Из всех этих трех групп аксиом, за исключением I 4-9, все плоскостные. Поэтому на проективной плоскости, где мы будем строить плоскостную модель трехмерного пространства, нельзя будет пользоваться теоремой Дезарга, так как она не может быть доказана без аксиом I 4-9. Но для наших дальнейших рассуждений теорема Дезарга имеет фундаментальное значение, ввиду чего эту теорему примем как оксиому.

Докажем предложение: <u>на проективной плоскости можно построить модель трехмерного пространства, если справедливость теоремы Дезаргова будет принята без доказательства.</u>

Предложение окажется доказанным, если при помощи геометрических фактов, имеющих место на проективной плоскости, будут введены специальные определения "точек"," прямых" и " плоскостей" , выполняющих все аксиомы трехмерного проективного пространства.

§ 13. Свойства множеств гомологий с общей осью

Пусть дана проективная плоскость H (рис. 62), для которой справедливость теоремы Дезарга принята без доказательств. Тогда на плоскости H может быть построена вся проективная геометрия плоскости , и следовательно, определена гомология со всеми ее известными свойствами. Используя указанную возможность, между точками плоскости H установим произвольное гомологичное соответствие. Обозначим это соответствие через P_1. Соответственные точки плоскости H обозначим через $A' \barwedge A''$, $B' \barwedge B''$, $C' \barwedge C''$... и т.д. Множество точек A', B', C' ... и т.д. отнесено к одному плоскому полю α_1, а точек A'', B'', C'' ... и т.д. к другому плоскому полю α_2.

Из свойств гомологии следует, что на плоскости H для гомологии P_1 существует ось гомологии X и единственный центр S_1. Таким образом, для плоских полей α_1 и α_2 мы имеем гомологическое соответствие P_1 с осью гомологии X и центром S_1.

Но между плоскими полями α_1 и α_2 можно установить другую гомологию P_2, которая при той же оси X будет ставить в соответствие другие точки полей α_1 и α_2. Как уже известно, если задана определенная ось гомологии, то она однозначно определяется двумя парами соответственных точек. Пусть при оси X гомология P_1 определяется парами соответственных точек $A' \overline{\wedge} A''$ и $B' \overline{\wedge} B''$. В силу этого, прямые $A'B'$ и $A''B''$ пересекаются на оси X в некоторой точке q. Проведем прямую $C''D''$, проходящую через точку q, и гомологию P_2 определим парами соответственных точек $A' \overline{\wedge} D''$ и $B' \overline{\wedge} C''$. Тогда, две гомологии P_1 и P_2 окажутся различными, так как они точкам A' и B' плоского поля α_1 ставят в соответствие различные точки D'' и C'' плоского поля α_2.

Основываясь на тех же рассуждениях, между плоскими полями α_1 и α_2 можно установить гомологии P_3, P_4, P_5 и вообще произвольное множество n различных гомологий, имеющих общую ось X. Так как каждой гомологии всегда соответствует определенный центр, то множество гомологичных соответствий $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \cdots \cdot P_n$ на плоскости H образуют множество центров гомологий.

Отметим некоторые, важнейшие для наших рассуждений, известные свойства этих гомологичных соответствий.

I. <u>Для любых двух произвольных гомологичных соответствий P_1 и P_2 существует единственная пара соответственных точек $A' \overline{\wedge} A''$, соответствующих друг другу в обеих гомологических соответствиях</u>. Действительно, ~~как~~ каждое гомологичное соответствие как было отмечено, определяется двумя парами соответственных точек. Если допустить существование двух пар соответственных точек соответствующих друг другу в гомологичных соответствиях P_1 и P_2 ,то тогда эти соответствия окажутся совпадающими,что противоречит первоначальному условию о различности соответствий P_1 и P_2 .

Покажем,что для двух различных гомологий P_1 и P_2 всегда существует пара соответственных точек $A' \mp A''$, соответствующих друг другу в обеих гомологиях. Пусть на плоскости H заданы *гомологичные соответствия* P_1 и P_2 *с центрами* S_1 и S_2 (рис.63). Возьмем произвольную пару точек $B' \mp B''$соответствия P_1 . В гомологии P_2 точке B'' будет соответствовать некоторая точка B'_0. Построим прямую $B'B'_0$ и ее пересечение с осью X точку Q . *Прямые* $B'B'_0$ и QB'' *соответствуют друг другу в обеих гомологичных соответствиях.* В самом деле, они проходят через соответственные точки $B' \mp B''$и $B'_0 \mp B''$ и пересекаются на оси X в одной точке Q . Прямая S_1S_2с прямыми $B'B'_0$ и QB''пересекается в определенных точках A' и A'' . Точки A' и A'' будут искомыми, так как они удовлетворяют требованиям перспективности по гомологиям P_1 и P_2 , т.е. прямая $A'A''$ проходит через центры S_1и S_2, а точки A' и A'' лежат на соответственных прямых $B'B_0$ и QB''.

Легко заметить,что искомая пара точек $A' \mp A''$ не зависит от выбора вспомогательной пары $B' \mp B''$, ибо допущение противного приведет к совпадению гомологий P_1 и P_2, противоречащему первоначальному условию о их различности.

2. <u>Существует множество гомологий, ставящих в соответветствие одну и ту же пару точек</u> $A' \mp A''$. В справедливости этого свойства легко убедиться, исходя из определенности гомологии парой соответственных точек и

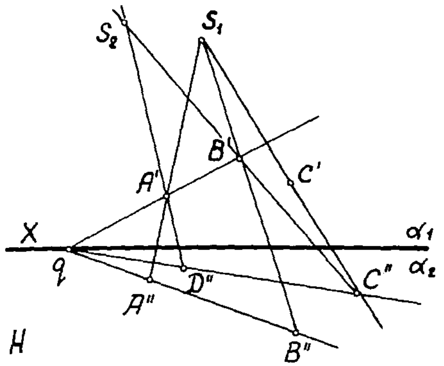


Рис. 62

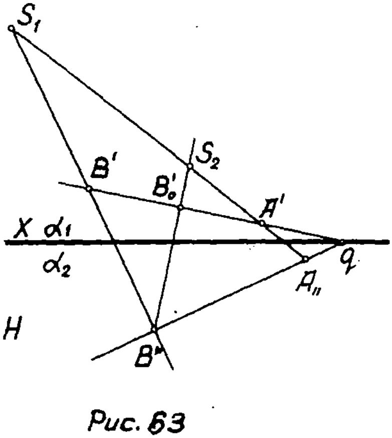


Рис. 63

центра гомологий. Пусть на плоскости H гомология P_1 определена парой соответственных точек $A' \mp A''$ и центра S_1. (Ось предполагается всегда неизменной). Но, при помощи пары $A' \mp A''$ можно задать другую гомологию P_2, если на прямой $A'A''$ выбран другой центр гомологии S_2. Продолжая таким образом, очевидно, можно определить гомологии P_3, P_4, P_5 ... и т.д. Все они будут различными и ставящими в соответствие одну и ту же пару точек $A' \mp A''$.

– –

3. <u>Если три гомологии P_1, P_2 и P_3 не ставят в соответветствие одну и ту же пару точек, то тогда существует единственная пара прямых, соответствующих друг другу по гомологиям P_1, P_2, P_3</u>. Пусть на плоскости H (рис.64) даны различные гомологии P_1, P_2, P_3, удовлетворяющие требованию свойства (3). Согласно свойству (I) для каждой пары из гомологий P_1, P_2, P_3 существует только одна общая пара соответственных точек. Предположим, что для гомологий P_1 и P_2 общей парой точек является $A' \mp A''$, а для гомологий P_2 и P_3 – пара точек $B' \mp B''$, а для гомологий P_1 и P_2 –пара точек $C' \mp C''$. Покажем, что тройки точек A', B', C' и A'', B'', C'' расположены на прямых, пересекающихся на оси гомологий X. Действительно, прямые $A'B'$ и $A''B''$ являются перспективными по гомологии P_3, так как соединяют соответственные по P_3 пары точек $A' \mp A''$ и $B' \mp B''$, поэтому они пересекаются в одной точке Q на оси X. Но, с другой стороны, прямые $A'B'$ и $A''B''$ перспективным и по гомологиям P_1 и P_2, ибо они точку Q оси X соединяют с парами $A' \mp A''$ и $B' \mp B''$, соответственными по P_1 и P_2.

Теперь заметим, что, если пара точек $C' \mp C''$ не будет принадлежать паре прямых $A'B' \mp A''B''$, то тогда получим противоречие. В самом деле, пусть пара $C' \mp C''$ не принадлежит паре $A'B' \mp A''B''$. Выберем на оси X точку t (на рис.65 не показано) отличную от q и соединим ее прямыми с точками C' и C''. Получим прямые $C't$ и $C''t$, соответственные по гомологиям P_1 и P_2. Но $A'B'$ и $A''B''$ также соответственны по тем же гомологиям. В силу этого, точки пересечения соответственных прямых $A'B' \times C't$ и $A''B'' \times C''t$ будут соответственными по гомологиям P_1 и P_2. Таким образом получим, что гомологии P_1 и P_2 кроме пары точек $C' \mp C''$ ставят в соответствие еще одну пару, а это противоречит свойству (I). Поэтому пара $C' \mp C''$ непременно должна принадлежать паре прямых $A'B'$ и $A''B''$. Следовательно, гомологичные соответствия P_1, P_2 и P_3 действительно характеризуются свойством (3).

4. <u>Существует множество гомологичных соответствий, ставящих в соответствие одну и ту же пару прямых.</u>

Как было показано выше, для трех различных гомологий и P_3 существует пара прямых, соответствующих друг другу в этих гомологиях. На основании этого легко показать справедливость свойства (4). Пусть пара прямых ℓ' и ℓ'' соответствует друг другу по гомологиям P_1, P_2 и P_3 (рис.65). Определим на плоскости H гомологию P_4, отличную от гомологий P_1, P_2 и P_3.

Для этого выберем на прямых ℓ' и ℓ'' пары соответственных точек $D' \mp D''$ и $E' \mp E''$, определяющих P_4; при этом так, чтобы D' и E' лежали на прямой ℓ', а пара D'' и E'' на прямой ℓ''.

Тогда, очевидно, гомология P_4 будет удовлетворять требованиям свойства (4). Легко усмотреть, что таким же образом можно построить гомологию P_5, P_6, P_7 ... и т.д., откуда и следует справедливость свойства (4).

Таковы некоторые важнейшие свойства различных гомологичных соответствий между точками основных двух полей α_1 и α_2 на проективной плоскости H. Эти свойства справедливы для всех различных гомологичных соответствий между плоскими полями α_1 и α_2, так как доказательства, приводимые выше, основываются на общих рассуждениях, исключающих положения, характеризующие частные, непроективные свойства гомологичного соответствия двух совмещенных плоских полей.

§ 14. Особые множества гомологичных соответствий

Однако, во множестве различных гомологий существуют особые множества, для которых справедливость перечисленных свойств без пояснений может показаться не вполне очевидной.

На плоскости H можно подобрать такое множество гомологичных соответствий, центры которых совпадают с одной и той же точкой плоскости H. В самом деле, в существовании такого множества гомологий легко можно убедиться следующим рассуждением: на проективной плоскости каждая гомология определяется осью, центром и парой соответственных точек. Поэтому различные гомологии могут иметь общую ось и центр, но пары соответственных точек должны быть непременно различными, т.е. при указанных условиях соответственные точки одной гомологии не должны

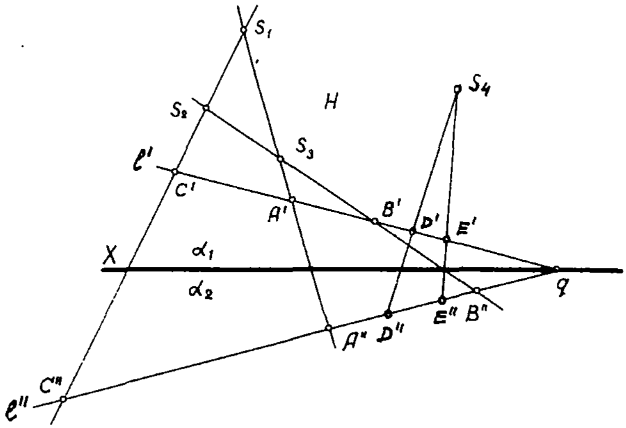


Рис. 64-65

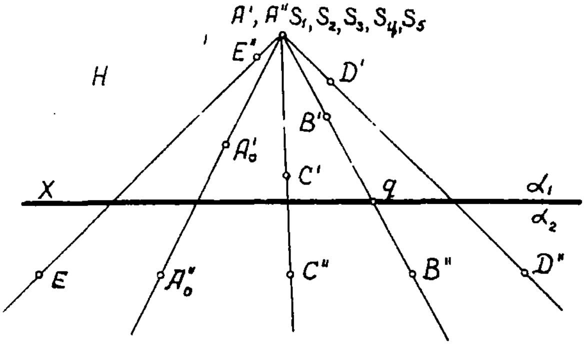


Рис. 66

быть соответственными в какой-нибудь другой, ибо тогда различные гомологии окажутся совпадающими. Руководствуясь этим положением, на плоскости H (рис.66) гомологию P_1 определим осью X, центром S_1 и парой точек $A'_0 \overline{\wedge} A''_0$. Определим теперь гомологию P_2 с той же осью X, и центром перспективы S_2, совпадающим с центром S_1, и парой $B' \overline{\wedge} B''$; при этом эту пару подберем так, чтобы точки B' и B'' не оказались соответственными по гомологии P_1. Очевидно, P_1 и P_2 будут различными гомологичными соответствиями плоских полей α_1 и α_2. Аналогично могут быть построены P_3, P_4, P_5 ... и т.д., сколько угодно различных гомологий. Характерной особенностью полученного множества различных гомологий, в отличие от всех остальных, является то, что их центры S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, ... и т.д. совпадают с одной и той же точкой плоскости H. Однако такое особое множество различных гомологий мы можем причислить к множествам, характеризующимся свойством (2). Существуют две точки плоских полей α_1 и α_2, которые соответствуют друг другу в гомологиях P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ... и т.д. Действительно, покажем, что эта пара точек совпадает с точкой плоскости H, с которой совпадают центры гомологий S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 ... и т.д. Возьмем точку A' плоского поля α_1, совпадающую с центром S_2, и построим ей соответственную точку в плоском поле α_2 по гомологии P_2. Построение выполним по известному правилу построения соответственных точек. Точку A' соединим прямой с какой-либо точкой α_1, например B'. Точке B' по гомологии P_2, в поле α_2 соответствует определенная точка B''. Соединим эту точку с точкой q, пересечением прямой $A'B'$ с осью X, и на прямую qB'' спроектируем A' из центра гомологии S_2. Но соответственные прямые $A'B'$ и qB'', ввиду совпадения точки A' с центром S_2 ,совпадают. Поэтому луч $A'S_2$ (многозначно определяющийся) пересечет прямую qB''в точке A'', совпадающей с точкой A'. Таким образом, точки A', A'' по гомологии P_2 соответственны и совпадают с центром гомологии S_2. Рассуждая аналогично,для гомологий $P_1, P_3, P_4, P_5 \cdots$ и т.д. получим,что пара точек A',A'' соответственны и по гомологиям,центры которых S_1, S_3, S_4, S_5, ... и т.д. совпадают с центром S_2. Следовательно, множество гомологий P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ... и т.д., с общим центром S характеризуется свойством (2).

Укажем теперь на другое особое множество различных гомологий плоскости H. Согласно свойству (2) на плоскости H существует множество гомологий P_1, P_2, P_3, P_4 . . ... и т.д., ставящих в соответствие единственную пару точек плоских полей α_1 и α_2. Отсюда, как следствие вытекает,что центры таких гомологий всегда расположены на одной прямой плоскости H. Однако не всегда можно утверждать обратное. Т.е. можно построить на плоскости H ряд гомологий,центры которых хотя и будут расположены на одной прямой,но не будут характеризоваться свойством (2).

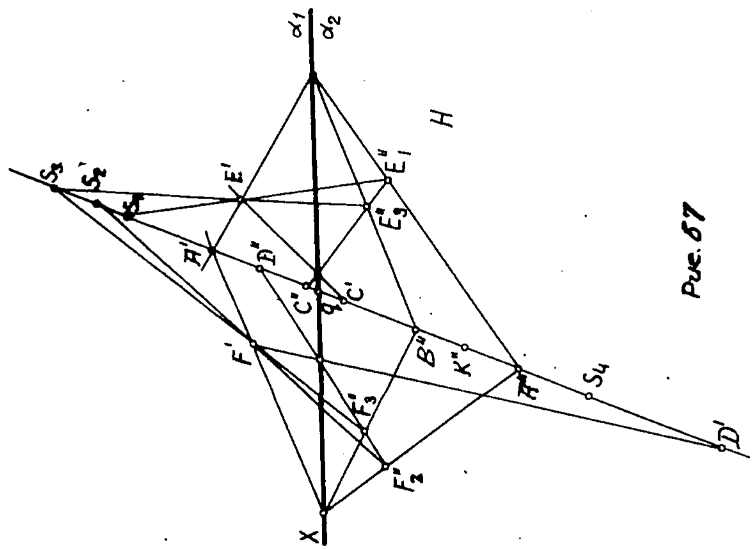
Действительно,зададим на плоскости H (рис.67) две гомологии P_1 и P_2 .Тогда,согласно свойству (1) существует пара точек A',A'', соответствующих друг другу по этим гомологиям. Поэтому центры S_1 и S_2 гомологий P_1 и P_2 будут расположены на прямой $A'A''$. Определим теперь гомологию P_3 при помощи пары $A' \mp B''$ и центром S_3 на прямой S_1S_2. Гомология P_3 не будет ставить в соответствие пару A',A'', ибо она точке A' плоского поля α_1 относит точку B'' плоского поля α_2. Но согласно свойству (1) будут существовать две пары точек $C' \mp C''$ и $D' \mp D''$, соответственные -первая по гомологиям P_1, P_3, а вторая по P_2, P_3. Теперь можно построить гомологию P_4, определив ее парой $C' \mp K''$ и центром S_4

на прямой $S_1 S_2$. Гомология P_4 не будет ставить в соответствие пару $C' \overline{\pi} C''$, которая является общей для гомологий P_1, P_3. Продолжая таким образом, можно определить гомологии P_5, P_6, P_7 ... и т.д. Полученное множество гомологий P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 ... и т.д., очевидно искомое, т.е. не будет характеризоваться свойством (2).

Однако, у этого множества гомологий легко обнаружить свойство (4). В самом деле, пусть прямая $S_1 S_2$, на которой расположены все центры гомологий $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$...и т.д. встречает ось перспективы X в некоторой точке q. Тогда, прямые qA' и qA'' соответственны по всем гомологиям P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 P_6, P_7 ... и т.д., так как на них расположены все пары точек, определяющие эти гомологии, что и доказывает справедливость свойства (4) для построенного нами множества гомологий.

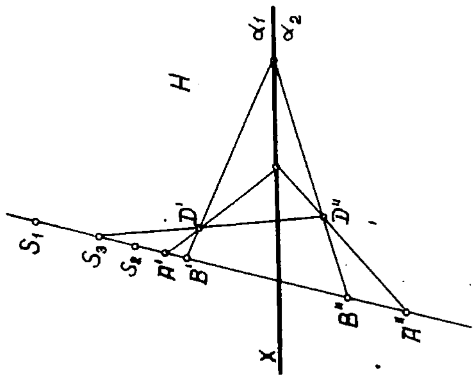
Таковы геометрические факты, имеющие место на плоскости, при установлении различных гомологий между ее точками.

Ниже будет показано, что, оперируя этими, по сути плоскостными геометрическими фактами, введением особой интерпретации, на плоскости H можно построить плоскостную модель трехмерного проективного пространства и показать в ней выполнимость всех проективных аксиом. Эта возможность, как было указано в начале главы, находится в согласии с современным учением о трехмерном проективном пространстве, как о совокупности элементов л ю б о й п р и р о д ы, называемых "точками", "прямыми" и " плоскостями", выполняющих все аксиомы трех групп: I-связи или принадлежности; II-порядка и III-непрерывности. Как известно, существует много различных интерпретаций или моделей трехмерного пространства, служащих тем или иным специальным геометрическим целям.



α1
α2
H
X
S3
S2
S1
E'
E''1
E''3
A'
D''
C''
C'
q
F'
B''
K''
A''
S4
D'
F''3
F''2

Рис. 67



α1
α2
H
X
S1
S3
S2
A'
B'
D'
D''
B''
A''

Рис. 68

§ 15. Построение плоскостной модели трехмерного проективного пространства

Примем следующие определения элементов:

1. "Точкой" называется центр одной определенной гомологии между плоскими полями α_1 и α_2. "Точкой" называется также точка, принадлежащая либо α_1, либо α_2.

2. "Прямой" называется множество точек A', A'' плоских полей α_1, α_2 и центров гомологий, ставящих в соответствие пару точек $A' \overline{\wedge} A''$. "Прямой" называется также прямая, принадлежащая либо α_1, либо α_2.

3. "Плоскостью" называется множество точек прямых a', a'' полей α_1, α_2 и центров гомологий, ставящих в соответствие пару прямых $a' \overline{\wedge} a''$, а также плоские поля α_1 и α_2 в отдельности.

4. "Различными" "точками" считаются центры различных гомологий, установленных между полями α_1 и α_2. "Различными" точками считаются также точки плоскости H, имеющие различные знаки $'$ и $''$ принадлежности к полям α_1 и α_2.

5. "Точки" считаются "совпадающими" тогда и только тогда, когда соответствующие им гомологии оказываются совпадающими.

6. "Различными" "прямыми" считаются такие два множества центров гомологий, которые ставят в соответствие различные пары точек полей α_1 и α_2.

7. "Различными" "плоскостями" считаются такие множества центров гомологий, которые ставят в соответствие различные пары прямых полей α_1 и α_2, а также поля α_1 и α_2.

8. "Точка" "принадлежит" или "лежит на" "прямой", если гомология, соответствующая этой "точке", ставит в соответ-

ствие ту пару точек полей α_1 и α_2 ,которые соответственны и по множеству гомологий,сопоставленных с " прямой ".

9. "Точка" не принадлежит "прямой ", если требование определения (8) не выполнено.

10. "Точка" принадлежит "плоскости", если сопоставленная с "точкой" гомология ставит в соответствие ту пару прямых полей α_1 и α_2 ,которую ставят в соответствие множества гомологий ,сопоставленных с " плоскостью".

11. "Точка " не принадлежит "плоскости" , если требование определения (10) не выполнено.

На основании определения прямой и плоскости, мы вынуждены будем рассмотренные выше особые множества центров гомологий принять за " прямые" и " плоскости", ибо они удовлетворяют требованиям определения "прямых"и " плоскостей". Действительно, особое множество различных гомологий ,имеющих общую ось и центр характеризуется, как мы убедились, тем,что они ставят в соответствие одну пару точек полей α_1 и α_2 , хотя и совпадающую с центром перспективы. А определение (2) требует именно этого. Остается только общий центр рассмотреть как такое множество центров различных гомологий , которое совпадает с одной и той же точкой плоскости H .Тем более что это не будет противоречить определению (4) о " различности точек ". Указанный общий центр гомологии, на основании (4) , можно рассмотреть как множество различных центров гомологии. В самом деле, различность точек обусловлена различностью гомологичных соответствий, сопоставленных с каждой точкой , а особое множество гомологий, имеющих общий центр , удовлетворяет этому требованию. Таким образом, общий центр гомологии, рассмотренный как множество центров, следует считать "прямой". Но такая "прямая" отличается от остальных тем, что вся она вырождена в одну точку плоскости H. Поэтому такие особые прямые будем называть "вырожденными прямыми" плоскостной модели трехмерного проективного пространства.

Аналогично, основываясь на определении (3), особое множество центров гомологий, расположенных на одной прямой плоскости H, следует считать " плоскостью ", так как это множество центров сопоставлено с множеством гомологичных соответствий, ставящих в соответствии пару прямых плоских полей α_1 и α_2. Ввиду того, что такое множество отличается от других множеств центров гомологий, называемых также " плоскостями ", расположением центров на одной прямой, то назовем его вырожденной "плоскостью". Ниже мы покажем, что вырожденные "прямые" и " плоскости" также будут выполнять все аксиомы проективной геометрии.

Теперь, приступая к проверке выполнимости каждой аксиомы, мы всегда будем прибегать к свойствам гомологичных соответствий между плоскими полями α_1 и α_2 плоскости H, существование которых в дальнейшем будет предполагаться без предварительных оговорок.

§ 16. Выполнимость проективных аксиом связи (принадлежности)

I. Каковы бы ни были две точки S_1 и S_2 существует прямая a, проходящая через точки S_1, S_2.

В соответсвии с принятыми нами определениями, эту аксиому следует изложить в следующем виде: I_1^0 Каковы бы ни были две центра гомологий S_1 и S_2, существует множество центров гомологий, ставящих в соответствие пару точек $A' \bar{\wedge} A''$ полей α_1 и α_2, содержащее центры гомологий S_1 и S_2. Доказательством справедливости этого утверждения будет показана и выполнимость аксиомы I_I.

Согласно свойству (1) на плоскости H существует пара точек $A' \bar{\wedge} A''$, соответствующих друг другу по гомологиям P_1 и P_2, центрами которых являются S_1 и S_2, а по свойству (2) существует множество центров гомологий, которые ставят в соответствие точки $A' \bar{\wedge} A''$, стало-быть центры S_1 и S_2 принадлежат этому множеству. Следовательно, аксиома I_I выполняется для любой пары центров гомологий.

I_2. Каковы бы ни были две различные точки S_1 и S_2, существует не более одной прямой, проходящей через точки S_1, S_2.

Эта аксиома соответствует утверждению: Каковы бы ни были различные два центра гомологий S_1 и S_2, существует не более одного множества гомологий, содержащего центры S_1, S_2.

Допустим, что существуют два различные множества центров гомологий, которым принадлежат одновременно центры S_1 и S_2. Так как два множества различны, то они ставят в соответствие различные пары точек $A' \bar{\wedge} A''$ и $B' \bar{\wedge} B''$ полей α_1 и α_2.

Но мы допустили, что центры гомологий S_1 и S_2 принадлежат одновременно этим двум множествам гомологий, поэтому гомологии, соответствующие центрам S_1 и S_2, ставят в соответствие две пары точек $A' \bar{\wedge} A''$ и $B' \bar{\wedge} B''$ полей α_1 и α_2, а этот вывод противоречит свойству (1), согласно которому для двух различных гомологий существует только единственная общая пара соответственных точек. Следовательно, для центров гомологий S_1 и S_2 существует единственное множество центров гомологий, которому они принадлежат. Таким образом, аксиома I_2 выполняется.

I_3. На каждой прямой имеется не менее трех точек. Существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой или

I^0_3. В каждом множестве центров гомологий, ставящих в соответствие пару точек $A' \overline{\overline{\wedge}} A''$ полей α_1 и α_2 существуют не менее одного центра гомологий и пары соответственных точек. Существуют, по крайней мере, три центра гомологий, не принадлежащие одному множеству центров гомологий, ставящих в соответствие одну пару точек полей α_1 и α_2.

Прежде чем показать справедливость этого утверждения, необходимо вспомнить, что "точкой" мы назвали не только центр гомологии, но и точку, либо плоскости α_1, либо плоскости α_2. Поэтому нужно показать выполнимость аксиом I_1 и I_2 и для этих точек, так и в сочетании их с центрами перспектив. А это показывается чрезвычайно просто. Из определения прямой, как множества центров гомологий, ставящих в соответствие пару $A' \overline{\overline{\wedge}} A''$ точек, принадлежащих полям α_1 и α_2, следует, что они образуют луч гомологии (здесь луч не полупрямая), который содержит и точки $A' \overline{\overline{\wedge}} A''$. Любые две точки, принадлежащие одна полю α_1, и другая α_2, всегда принадлежит какой-либо гомологии и поэтому, как соответственные точки, определяют луч гомологии (выполнимость аксиомы I_1) и при этом единственный. Через пару соответственных точек проходит единственный луч гомологии (выполнимость аксиомы I_2) Если взять точки полей α_1 и α_2 в сочетании с " точками", как центрами гомологии, то выполнимость аксиом I_1 и I_2 также очевидна. Действительно, центр гомологии в сочетании с любой точкой полей α_1 и α_2 определяет луч гомологии и при этом единственный.

Теперь в выполнимости первой части аксиомы I_3 убедимся следующими рассуждениями: множеству центров гомологий соответствует множество гомологичных соответствий плоскости H . Оно должно содержать хотя бы одно гомологичное соответствие, на любом луче которого (при всегда существующей, общей для всех гомологий оси X), т.е. в нашей интерпретации, называемой "прямой", существует не менее одного центра гомологии и пары соответственных точек полей α_1 и α_2.

Далее, на плоскости H не все гомологии ставят в соответствие определенную пару точек плоских полей α_1 и α_2 . Стало-быть, соответствующие им центры гомологии не все будут принадлежать одной "прямой". По крайней мере три центра можно подобрать так, что один не будет принадлежать " прямой ", определяемой двумя остальными центрами. В самом деле, на плоскости H возьмем два центра гомологий S_1 и S_2 . На прямой S_1S_2 будет существовать пара точек $A' \mp A''$, соответственных по гомологиям P_1 и P_2 . Таким образом, множество будет состоять из двух центров гомологий S_1 и S_2. Теперь зададим P_3 так, чтобы в этом гомологичном соответствии точке A' соответствовала какая-либо другая точка B'' , отличная от A''. Тогда множество гомологий P_1, P_2, P_3 будет таково, что оно не будет ставить в соответствие одну и ту же пару точек. Но так как P_1 и

P_2 ставят в соответствие пару A' и A'' , а по P_3 они не соответственны ,то поэтому центр гомологии S_3 не принадлежит множеству центров гомологии S_1, S_2 . Таким образом утверждение I_3^0 доказано,откуда непосредственно следует справедливость и второй части аксиомы I_3.

I_4. Через каждые три точки S_1, S_2, S_3 , не лежащие на одной прямой,проходит некоторая плоскость α . На каждой плоскости существует точка, принадлежащая плоскости.

I_4^0. Три центра гомологии S_1, S_2 и S_3,не принадлежащие множеству гомологий,ставящих в соответствие одну пару точек полей α_1 и α_2 ,принадлежат множеству центров гомологий,ставящих в соответствие одну пару прямых полей α_1 и α_2. В таком множестве существует центр гомологии,ставящий в соответствие ту же пару прямых.

Согласно свойству (3) , три гомологичных соответствия с центрами S_1, S_2, S_3 , если не ставят в соответствие пару точек , то тогда ставят в соответствие пару прямых полей α_1 и α_2, а по свойству (4) существует множество гомологий ,которое ставит в соответствие ту же пару прямых. Множеству этих гомологий соответствует множество центров перспектив, которому и будут принадлежать центры S_1, S_2 и S_3 . Следовательно,три центра гомологий S_1, S_2, S_3 определяют множество центров гомологий, удовлетворяющее требованию первой части утверждения I_4^0. Справедливость второй части усматривается из следующих рассуждений. Если множество указанных выше гомологичных соответствий определено только центрами S_1, S_2, S_3 ,то всегда возможно построить центр гомологий S_4 , принадлежащий множеству S_1, S_2, S_3 . Действительно,пусть $a_1 \bar{\wedge} a_2$ - пара соответственных прямых, по центрам перспектив S_1, S_2, S_3 существующая согласно свойству (3). Определим теперь гомологию произвольным центром S_4 и такой парой соответственных точек $B' \overline{\overline{\wedge}} B''$, чтобы B' принадлежала прямой a', а точка B''-прямой a''. Тогда прямые a' и a'' окажутся соответственными и в гомологии P_4, а потому S_4 будет принадлежать множеству центров гомологии S_1, S_2, S_3. Таким образом убеждаемся в справедливости второй части утверждения I^0_4 и, стало-быть, в выполнимости аксиомы I_4.

I_5. Через каждые три точки S_1, S_2 и S_3, не лежащие на одной прямой, проходит не более одной плоскости.

Этой аксиоме соответствует утверждение:

I^0_5. Три центра гомологии S_1, S_2 и S_3, не ставящие в соответствие одну пару точек полей α_1 и α_2, определяют единственное множество центров гомологий, ставящих в соответствие одну и ту же пару прямых этих полей.

Множества гомологий, ставящих в соответствие пару прямых полей α_1 и α_2, мы различаем по парам соответственных прямых. Если два множества центров гомологий ставят в соответствие различные пары прямых полей α_1 и α_2, то тогда они являются различными. В противном случае совпадают. В (3) утверждается, что центры гомологичных соответствий S_1, S_2 и S_3 ставят в соответствие единственную пару прямых полей α_1 и α_2, поэтому они определяют единственное множество центров гомологичных соответствий, которому принадлежат центры S_1, S_2 и S_3.

Следовательно, утверждение I^0_5 справедливо, чем и доказывается выполнимость аксиомы I_5.

Легко усматривается выполнимость аксиом I_4 и I_5 и для точек полей α_1 и α_2 в сочетании с центрами гомологии. В самом деле, различные сочетания троек "точек" могут быть следующие:

Из трех "точек", не лежащих на одной "прямой",

I. Все три являются точками либо α_1, либо α_2.

2. Две точки принадлежат полю α_1, одна α_2 и наоборот.

3. Две точки принадлежат либо α_1, либо α_2; третьей является центр гомологии.

4. Две точки представляют собой центры гомологии, третьей является точка либо поля α_1, либо α_2.

Выполнимость аксиом I_4 и I_5, когда имеем тройки точек полей α_1 или α_2 совершенно очевидна, так как с ними, по первоначальной условленности, связываем существование единственных двух полей α_1 и α_2.

Во всех остальных случаях на плоскости H возможно построить только единственную пару прямых, пересекающихся на оси перспективы X. Этой парой определяется единственное множество центров гомологий, ставящих в соответствие указанные прямые, это множество по нашему определению и будет единственной "плоскостью".

Действительно, пусть из трех "точек" одна A' принадлежит плоскому полю α_1, а две B'' и C'' полю α_2. Прямая $B'C'$ пересечет ось X в единственной точке q, а q с точкой A' определят единственную прямую $A'q$. Множество центров гомологий, по которым $A'q \,\bar{\wedge}\, B''C''$, будет единственной "плоскостью", определяемой данными тремя "точками". То же самое получим, если возьмем две точки плоского поля α_2 и одну поля α_1.

Пусть теперь даны две точки A' и B' плоского поля α_1 и произвольный центр гомологии S_1. Гомологичное соответствие, центром которого является S_1 прямую $A'B'$ переведет на плоское поле α_2 в единственную прямую $A''B''$. Единственная пара соответственных прямых $A'B'$ и $A''B''$ определят единственное множество центров гомологий, которое мы назвали "плоскостью". Такие же рассуждения мы можем применить и в случае, когда взяты центр гомологий S_1 и две точки A'' и B'' плоского поля α_2.

Наконец, пусть даны два центра гомологии S_1, S_2 и одна произвольная точка A' плоского поля α_1.

Гомологии P_1 и P_2, центрами которых являются S_1 и S_2, преобразят точку A' на плоское поле α_2 в две единственные точки A'' и A''_0. Прямой $A''A''_0$ на плоском поле α_1 будет соответствовать единственная прямая $A'q$ (где q — точка встречи прямой $A''A''_0$ с осью перспективы X), а пара соответственных прямых $A''A''_0 \overline{\wedge} A'_q$ определит единственное множество гомологичных соответствий, т.е. единственную "плоскость". Легко усмотреть, что пара центров S_1 и S_2, сопоставленная теперь с точкой A'' плоского поля α_2, приведет к тому же результату.

I_6. Если две точки S_1, S_2 прямой a лежат на плоскости α, то каждая точка прямой a лежит на плоскости α.

I_6^0. Если два центра гомологии S_1 и S_2, принадлежащих множеству центров гомологии, ставящих в соответствие пару точек полей α_1 и α_2, принадлежат множеству центров гомологии, ставящих в соответствие пару прямых этих же плоских полей, то тогда и каждый центр гомологии первого множества принадлежит множеству центров гомологии второго множества.

Пусть по первому множеству центров гомологий друг другу соответствуют пара точек $A' \overline{\wedge} A''$ плоских полей α_1 и α_2, а по второму — пара прямых $a' \overline{\wedge} a''$ этих же плоских полей.

Покажем, что так как по утверждению $\overset{\circ}{I}_6$ центры гомологий S_1 и S_2, принадлежащие первому множеству, принадлежат и второму множеству центров гомологии, то поэтому пара соответственных точек $A' \overline{\wedge} A''$ должна $A' \to a'$ и $A'' \to a''$. Допустим обратное, тогда, соединив произвольную точку оси гомологии X с точками A' и A'', получим пару прямых $A'q$ и $A''q$, соответственных по гомологичным соответствиям P_1 и P_2 с центрами S_1 и S_2. Но a' и a'' соответственны также по гомологиям P_1 и P_2. Поэтому пересечением прямых $(a' \times A'q)$ и $(a'' \times A''q)$ точки B' и B'' окажутся гомологичными. Таким образом мы получили две пары точек A', A'' и B', B'' соответствующих друг другу по гомологичным соответствиям P_1 и P_2 с центрами S_1 и S_2. Этот результат противоречит свойству (1), по которому существует единственная пара точек, являющаяся общей для двух различных гомологий. На основании этого заключаем, что точки A' и A'' должны принадлежать прямым a' и a''. Следовательно, каждый центр гомологии, принадлежащий первому множеству, ставит в соответствие пару прямых $a' \overline{\wedge} a''$, а потому принадлежит и второму множеству центров гомологий.

Из вышеизложенного убеждаемся в справедливости утверждения $\overset{\circ}{I}_6$, что непосредственно показывает выполнимость аксиомы I_6.

I_7. Если две плоскости α и β имеют одну общую точку S_1, то они имеют еще по крайней мере одну точку S_2.

Дадим этой аксиоме соответствующую формулировку:

$\overset{\circ}{I}_7$. Если два множества центров гомологий, ставящих в соответствие две пары прямых $a' \overline{\wedge} a''$ и $b' \overline{\wedge} b''$ полей α_1 и α_2, имеют общий центр S_1 такой, что по этому центру гомологичны $a' \overline{\wedge} a''$ и $b' \overline{\wedge} b''$, то тогда непременно существует по крайней другой еще один такой же центр гомологии S_2.

По требованию утверждения $\overset{0}{I_7}$ пары прямых (a', a'') и (b', b''), принадлежащих плоским полям α_1 и α_2 , соответственны по центру гомологии S_1. Поэтому точки A' и A'' , являющиеся пересечением прямых ($a' \times b'$) и ($a'' \times b''$), также соответственны по центру S_1. По свойству (9) существует множество центров гомологий, ставящих в соответствие пару A' и A''. Стало-быть, существует по крайней мере еще один центр гомологии S_2 , по которому A' также гомологичны A''. Но в силу гомологичности $A' \overline{\overline{\wedge}} A''$ и прямые $a' \overline{\overline{\wedge}} a''$, $b' \overline{\overline{\wedge}} b''$ гомологичны по ентру S_2 . Отсюда можно заключить ,что центр гомологии S_2 также является общим для двух множеств центров гомологии, ставящих в соответствие прямые $a' \overline{\overline{\wedge}} a''$ и $b' \overline{\overline{\wedge}} b''$ полей α_1 и α_2 .

Таким образом,справедливостью утверждения $\overset{0}{I_7}$ мы доказали и выполнимость аксиомы I_7.

Если за общую "точку" двух "плоскостей" принята точка плоского поля α_1 или α_2 (что допустимо по определению (1)), то существование второй общей точки доказывается из однозначности гомологичного соответствия следующими рассуждениями: пусть общая точка двух множеств центров гомологий, ставящих в соответствие две пары прямых ($a' \overline{\overline{\wedge}} a''$) и ($b' \overline{\overline{\wedge}} b''$) полей α_1 и α_2 , есть точка A', принадлежащая плоскому полю α_1. Тогда точка A' непременно является точкой пересечения прямых a' и b' (противное, как было показано выше, приводит к противоречию). Но это приводит к непременному существованию еще одной точки A'' пересечения прямых a'', b'' и являющейся общей для двух указанных множеств центров гомологии.

I_8. Имеется не менее четырех точек, не лежащих на одной плоскости.

В соответствующей формулировке будем иметь:

I^0_8. Имеется не менее четырех центров гомологий S_1, S_2, S_3, S_4 или точек A, B, C, D принадлежащих плоским полям α_1 и α_2, не принадлежащих одному множеству центров гомологий, ставящих в соответствие одну пару прямых $a' \mp a''$ плоских полей α_1 и α_2.

Смысл утверждения $\overset{0}{I}_8$ заключается в том, что минимальное количество центров гомологий, удовлетворяющих требованиям этого утверждения, равно четырем. Т.е. всегда можно подобрать четыре центра гомологий так, чтобы они одновременно не ставили в соответствие одну пару прямых полей α_1 и α_2. В самом деле, пусть даны произвольные три центра гомологий S_1, S_2, S_3. По свойству (3) мы имеем, что на плоскости H существует единственная пара прямых $a' \mp a''$, принадлежащих плоским полям α_1 и α_2, которые соответственны в гомологиях с центрами S_1, S_2, S_3. Зададим теперь гомологичное соответствие парой точек $A' \mp A''$ и точкой S_4 так, чтобы прямые $a' \mp a''$ не соответствовали друг другу по S_4. Тогда центр S_4 по определению (IO) не будет принадлежать множеству центров гомологий S_1, S_2, S_3. Очевидно, это предложение справедливо и для точек полей α_1 и α_2 в сочетании с центрами гомологий, ибо для любой тройки точек полей α_1 и α_2 в сочетании с центрами гомологий, как показали выше, справедливо утверждение I^0_5, а четвертую точку или центр гомологии, не принадлежащую множеству взятой тройки, всегда возможно построить. Таким образом, утверждение I^0_8 справедливо и, стало-быть, выполнимость аксиомы I_8 показана.

I_9. Каждые две прямые, расположенные в одной плоскости, имеют одну общую точку.

По принятым нами определениям этой аксиоме соответствует утверждение:

I_9^0. Каждые два множества центров гомологий, ставящих в соответствие две пары точек $A' \mp A''$ и $B' \mp B''$ полей α_1 и α_2, и принадлежащие одному множеству центров гомологий, ставящих в соответствие одну пару прямых $a' \mp a''$ полей α_1 и α_2, имеют такой общий центр гомологий S_1, по которому пары точек $A' \mp A''$ и $B' \mp B''$ будут соответственными.

Ввиду того, что два множества центров гомологий, по которым $A' \mp A''$ и $B' \mp B''$ принадлежат множеству центров гомологий ставящих в соответствие прямые $a' \mp a''$, то A' и B' принадлежат прямой a', а A'' и B''—прямой a''. Две пары точек $A' \mp A''$ и $B' \mp B''$ определяют одно гомологичное соответствие, имеющее единственный центр S_1. Но центр S_1 ставит в соответствие одновременно пары точек $A' \mp A''$ и $B' \mp B''$. Следовательно центр гомологии S_1 принадлежит одновременно двум заданным множествам центров гомологий, т.е. является общим.

Легко проверить, что эти рассуждения справедливы и для вырожденных множеств центров гомологий, когда они расположены на однойпрямой плоскости H (рис.68). Таким образом, утверждение I_9^0 справедливо для плоскости H, а потому аксиома I_9 выполняется.

На основании вышеизложенного мы можем заключить, что построенное на плоскости множество "точек", "прямых" и "плоскостей" таково, что они выполняют все проективные аксиомы принадлежности. Поэтому для них справедливы все теоремы, доказательство которых основано только на этих аксиомах. В частности, как известно, при помощи проективных аксиом для нашего множества "точек", "прямых" и "плоскостей" могут быть доказаны следующие важные для целей начертательной геометрии три теоремы:

1. Две "плоскости" всегда имеют одну общую "прямую".

2. "Плоскость" и не принадлежащая ей "прямая" всегда имеют одну общую "точку".

3. Три "плоскости", не принадлежащие одной "прямой", всегда имеют одну общую "точку."

§ 17. Выполнимость проективных аксиом порядка и непрерывности

Приступая к доказательству выполнимости проективных аксиом порядка и непрерывности в построенном нами множестве элементов, напомним, что плоскость H, на которой мы строили модель трехмерного проективного пространства, первоначально нами принята проективной плоскостью. Как известно, все проективные аксиомы групп II_{1-6} и III_1 относятся к точкам прямой, поэтому они имеют место на плоскости H. Плоские поля α_1 и α_2, по первоначальному условию образованы гомологичным соответствием между точками проективной плоскости H. Поэтому проективные аксиомы групп II_{1-6} и III_1 следует считать справедливыми, либо для плоского поля α_1, либо для α_2 (хотя будет вполне логичным считать их справедливыми для обоих плоских полей одновременно). Примем, что проективные аксиомы $\overline{\text{II}}_{1-6}$ и $\overline{\text{III}}_1$ справедливы для плоского поля α_1.

Нетрудно показать, что если в нашем множестве " точек " "прямых и " плоскостей" , хотя бы для одной " плоскости" , аксиомы $П_{1-6}$ и $Ш_1$ выполняются , то в силу выполнимости аксиом I_{1-9} , они справедливы и для любой " плоскости " нашего множества .

Для нашего множества элементов, из аксиом связи следует справедливость утверждения: <u>Элементы любой " плоскости" могут быть спроектированы на любую другую " плоскость" с произвольной " " точки" , не совпадающей с этими " плоскостями"</u>.

Короче говоря , между любыми двумя "плоскостями" множества "элементов" может быть установлено перспективное соответствие. В самом деле, пусть даны две"плоскости" α_3 и α_4 и одна "точка" S_1,не "принадлежащая" им.На одной из плоскостей α_1 и α_2 возьмем "точку" A . По аксиомам I_I и I_2 существует единственная "прямая"S_1A , которая не "принадлежит" ни одной из данных "плоскостей". По теореме 3 "прямая" S_1A пересекает другую "плоскость" которой не "принадлежит "точка" A , в единственной точке B." Точка" B является проекцией "точки" на эту плоскость. Продолжая таким образом, все "точки" одной "плоскости" будут спроектированы на другую "плоскость" с произвольной "точки" S_1. Следовательно между "точками" данных "плоскостей" установится перспективное соответствие с центром перспективы в "точке" S_1. Ось перспективы всегда существует, так как по теореме (2) всегда существует "прямая" пересечения двух "различных" "плоскостей".

Основываясь на вышеизложенном,заключаем,что плоское точечное поле α_1 ,для которого справедливы аксиомы $П_{1-6}$ и $Ш_1$, всегда может быть приведено в перспективное соответствие со всеми "плоскостями" построенного нами множества "плоскостей" на плоскости H .Но так как перспективное соответствие характеризуется однозначностью, коллиниарностью и сохранением инцидентности, то поэтому аксиомы $П_{1-6}$ и $Ш_1$ окажутся справедливыми для всех "плоскостей" нашего множества.

Таким образом, мы доказали утверждение о возможности построения на проективной плоскости H плоскостной модели трехмерного проективного пространства при условии, что для этой плоскости в дополнении плоскостных аксиом справедлива и теорема Дезарга.

Элементы этой модели-"точки", " прямые" и " плоскости" соответствуя определениям I-II, несмотря на совпадение с проективной плоскостью, выполняют, как убедились выше, все аксиомы *проективной геометрии трехмерного пространства.* Таку модель проективного пространства, ввиду ее вырожденности в плоскость, мы условились называть также и "расплющенным трехмерным пространством".

Совершенно очевидно, что для расплющенного трехмерного пространства имеет место следующее утверждение:

Всякое проективное предложение о проективном трехмерном пространстве или проективное предложение в проективном трехмерном пространстве *справедливо и для расплющенного* трехмерного пространства. Утверждается и обратное.

§ 18. Несобственные элементы

Все наши рассуждения и выводы о построении плоскостной модели относятся к проективной плоскости, но для того чтобы они были справедливы и для евклидовой плоскости, *на которой нам* приходится фактически осуществлять все построения, то для этого требуется, как известно, евклидовую плоскость дополнить несобственными элементами. После этого, множество несобственных точек, расположенных на несобственной прямой, можно охарактеризовать как множество центров аффинных гомологий, устанавливающих соответствие между точками плоских полей α_1 и α_2. Это множество центров свяжет соответствием единственную пару несобственных прямых a'_∞ и a''_∞ полей α_1 и α_2, пересекающихся на общей оси гомологии, т.е. общей прямой полей α_1 и α_2.

Поэтому, по принятым нами определениям, указанное множество центров аффинных гомологий будет "плоскостью", но "вырожденной, так как все ее " точки " будут совпадать с несобственной прямой евклидовой плоскости H. "Прямая" вырожденной несобственной "плоскости" определяется как множество несобственных центров гомологий, ставящих в соответствие единственную пару точек A'_∞ и A''_∞, принадлежащих несобственным прямым a'_∞ и a''_∞. "Точки" и "прямые" несобственной вырожденной "плоскости" выполняют все проективные аксиомы I_{1-8}, II_{1-6} и III_1, ибо их можно свести к утверждениям о перспективно аффинных соответствиях между плоскими полями α_1 и α_2 с неизменной общей осью x, точно так же, как это было сделано выше для гомологичных соответствий между плоскими полями α_1 и α_2.

§ 19. Построение плоскостной модели трехмерного евклидова пространства аналитическим методом

В этом параграфе в основу построения плоскостной модели трехмерного пространства положена указанная в начале главы возможность различных интерпретаций трехмерного пространства, при которых самые привычные для нас определения и понятия физического трехмерного пространства могут принять различные формы.

Широко известна, например, аналитическая интерпретация геометрии с геометрическими отношениями, сведенными к числовым отношениям, к которой мы и прибегнем ниже для построения расплющенного пространства.

Измеряя стороны треугольника ABC единицами одинаковой длины (рис. 69) получим числа, метрически определяющие его с точки зрения евклидовой геометрии физического смысла, т.е. величины углов α, β и γ могут быть определены отношениями

$$\cos\alpha = \frac{d_1}{c}, \quad \cos\gamma = \frac{d_2}{a}, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2, \quad \cos\beta_1 = \frac{h}{c} \text{ и } \cos\beta_2 = \frac{h}{a} \quad \text{(I)}$$

где h длина перпендикуляра BD, опущенного с точки B на сторону AC и получаемая равенством

$$h = \sqrt{a^2 - d_2^2} \quad \text{или} \quad h = \sqrt{c^2 - d_1^2}. \qquad (2)$$

Однако, как известно, не противореча аксиомам измерения евклидовой геометрии, отрезки того же треугольника ABC можно измерить единицами различных длин, тогда численные значения сторон a, b и c изменятся, а потому изменится и метрическая форма треугольника ABC.

Действительно, при других значениях длин сторон a, b и c, удовлетворяющих условию треугольника, отрезок BD перестанет быть перпендикуляром опущенным с точки B на сторону AC, ибо, в связи с изменением длины b - точка D определит длины d_1 и d_2, которые не будут удовлетворять равенства

$$a^2 - d_1^2 = c^2 - d_2^2 \qquad (3)$$

и

$$d_1 + d_2 = b.$$

Определив же по этим равенствам новые значения d_1 и d_2 на стороне AC найдется такая точка D°, которая и определит отрезок BD_0, представляющий собой "перпендикуляр", опущенный с точки B на сторону AC, соответствующий новым значениям длин a, b и c. Теперь "прямыми", а стало-быть и " равными", углами должны считаться углы AD_0B и CD_0B, которые с физической точки зрения вовсе не равны. Совершенно очевидно, что в связи с изменением длин a, b и c по соотношениям (I) получим другие значения углов α, β и γ. Поэтому треугольник ABC изменит свою форму, несмотря на то, что визуально он остается прежним. Исходя из этого, специальным подбором единиц (зависящих от нас) треугольнику ABC можно придать любую "форму" : сделать его "равносторонним"," косоугольным" и даже "прямоугольным" с "прямым" углом при вышине A, если длины a, b и c будут подобраны так, чтобы удовлетворялось условие

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Все вышеизложенное может быть использовано для наших целей-построения расплющенного пространства.

Действительно, пусть в плоскости H дан плоский четырехугольник $ABCD$ (рис.70), где углы BAD, BAC, и CAD обозначены через α, β и γ. Стороны AB, AC, AD, BD, BC и DC измерим единицами равной длины и известным способом определим величины углов α, β и γ. Так как четырехугольник $ABCD$ плоский и единицы, которыми были измерены его стороны, одинаковы, то получим

$$\alpha = \beta + \gamma \tag{4}$$

Но как указывалось выше, специальным подбором единиц различных длин треугольникам ABC, ABD и ACD можно придать любую "форму", а потому можно изменить и величины углов α, β и γ.

Покажем, что единицы измерения для сторон AB, AC, AD, BD, BC и DC можно подобрать так, чтобы величины углов α, β и γ удовлетворяли условию

$$\alpha < \beta + \gamma. \tag{5}$$

Для этого единицы измерения сторон AB, AC, AD, BD и BC оставим без изменения, изменим только единицу измерения стороны DC, при этом подберем ее так, чтобы величина угла γ по треугольнику ACD получилась больше первоначальной величины. Тогда, очевидно, условие (5) будет удовлетворено.

Таким образом мы приходим к заключению, что отрезки AB, AC и AD удовлетворяют условию трехгранного угла. Поэтому отрезок AC не принадлежит плоскости тройки точек A, B, D, в связи с чем точка C, принадлежащая отрезку AC, также не принадлежит этой плоскости. Следовательно, фигура $ABCD$ является тетраэдром. Однако фигура $ABCD$ такова, что если ее стороны измерить единицами равной величины, то она окажется плоской.

Далее ясно, что тетраэдру $ABCD$, соответствующим подбором единиц измерения, можно придать любую форму, в частности, можно сделать его и прямоугольным. В самом деле, пусть (рис.71) на плоскости H начерчен произвольный четырехугольник $OABC$ и пусть отрезки OA, OB и OC измеренные какими-либо единицами измерения, имеют длины a, b и c. Теперь для отрезков AB, BC и AC подберем такие единицы измерения, чтобы их длины соответственно выразились числами:

$$d=\sqrt{a^2+b^2}; \quad e=\sqrt{b^2+c^2}; \qquad f=\sqrt{a^2+c^2}.$$

Тогда нетрудно заключить, что треугольники AOB, BOC и AOC

окажутся прямоугольными с прямыми углами при вершине O .

На основании этого отрезки OA , OB и OC будут перпендикулярными между собой в точке O и поэтому образуют "телесный" прямоугольный трехгранник. Прямые отрезков OB , OC и OA обозначим через X , Y и Z соответственно и пример их за прямоугольную координатную систему. Каждой произвольной точке плоскости H сопоставим одну какую-нибудь ломаную $ODEM$,сторонами, параллельными осям X, Y и Z . Элементы OD, DE и EM этой ломаной измерим единицами измерения осей X , Y и Z .Определенные таким образом числа, соответствующие элементам OD , DE и EM, обозначим через X_M , Y_M и Z_M собственно и примем их за числовые координаты M . Сопоставив таким образом числовые координаты всем точкам плоскости H ,примем следующие определения:

I. "Точкой" называется любая точка плоскости H , имеющая определенные числовые координаты.

2. "Различными точками" считаются любые две "точки",имеющие различные тройки числовых координат.

3. "Совпадающими точками" считаются две точки ,имеющие одинаковые числовые координаты.

4. "Отрезком "считается система двух "различных" "точек".

5. "Расстоянием "между двумя "различными точками" $M(X_M, Y_M, Z_M)$ и $N(X_N, Y_N, Z_N)$ или " длиной отрезка MN" считается положительное число ,полученное из выражения:

$$\rho = \sqrt{(X_M - X_N)^2 + (Y_M - Y_N)^2 + (Z_M - Z_N)^2}. \qquad (6)$$

Покажем теперь,что множество определенных таким образом "точек" плоскости H является метрическим трехмерным пространством. Действительно, легко усмотреть, что наше множество "точек" плоскости H удовлетворяет требованиям следующего определения метрического пространства по П.С.Александрову ("Введение в общую теорию множеств и функций " Москва; 1948 г.стр. 227): метрическим пространством называется множество R элементов произвольной природы, называемых "точками" метрического пространства R, в котором для любых двух элементов M, N определено неотрицательное действительное число $\rho(MN)$, называемое р а с с т о я н и е м между точками M и N и удовлетворяющее трем следующим условиям:

1. Аксиома тождества — $\rho(MN) = 0$ тогда и только тогда, когда точки M и N совпадают.

2. Аксиома симметрии — $\rho(MN) = \rho(NM)$.

3. Аксиома треугольника — каковы бы ни были три точки M, N и C метрического пространства R, всегда

$$\rho(MN) + \rho(NC) \geqslant \rho(NC).$$

Действительно, в нашем множестве элементами названы "точки" плоскости H. Природа их такова, что каждой "точке" соответствует определенная координатная ломаная с элементами, параллельными осям X, Y, Z плоскости H. Длины элементов координатной ломаной определяют числовые координаты рассматриваемой "точки". Две "точки" M и N нашего множества совпадают тогда и только тогда, когда,

$$X_M = X_N, \quad Y_M = Y_N \text{ и } Z_M = Z_N.$$

Известно, что выражение (6) расстояния между двумя различными точками удовлетворяет всем требованиям трех аксиом, входящих в определение.

Таким образом, наше множество "точек" плоскости H есть пространство и так как каждая "точка" сопоставлена с тремя числовыми координатами, то поэтому оно – трехмерное пространство. Однако это трехмерное пространство отличается от обычного неимением наглядной пространственности в физическом смысле; его "точки" по первоначальному условию лежат на плоскости H, следовательно, оно вырожденное и поэтому, его как отмечалось выше, целесообразно называть " расплющенным трехмерным пространством".

Далее легко показать, что расплющенное пространство, построенное при помощи "точек", содержит в себе также элементы второго и третьего родов, именуемые в геометрии трехмерного пространства прямыми и плоскостями.

Примем следующие определения:

6. "Плоскостью" называется носитель множества "точек" плоскости H, координаты которых связаны линейным уравнением вида

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{7}$$

7. "Различными плоскостями" называются носители таких двух множеств "точек" плоскости H, координаты которых связаны различными линейными уравнениями вида (7).

8. "Прямой" называется носитель множества точек плоскости H, координаты которых удовлетворяют одновременно двум уравнениям вида (7) с непропорциональными коэффициентами.

9. "Различными прямыми" называются носители таких двух множеств точек плоскости H, координаты которых одновременно удовлетворяют двум парам уравнений вида (7); при этом координаты одного множества удовлетворяют уравнениям первой пары, а координаты второго множества координаты другой пары уравнений.

Возможность подбора на плоскости H множества точек с координатами, удовлетворяющими требованиям определений 6,7,8 и 9 совершенно очевидна и поэтому не требует специальных пояснений. Рассмотрим поведение точек особых множеств плоскости H.

Пусть на плоскости H (рис. 72) вышеизложенным способом построены прямоугольные координатные оси X, y и z. Проведем произвольную прямую L и построим множество точек с определенными координатами, при этом так, чтобы все они были расположены на прямой L, так, например, точку $M(X_M, y_M, z_M)$. Пусть далее прямая L на осях X, y, z отсекает отрезки определенных длин a_L, b_L и c_L (соответственно измеренные единицами измерения), при помощи которых была определена перпендикулярность осей X, y и z. Покажем, что координаты множества таких точек связаны уравнением плоскости

$$\frac{X}{a_L} + \frac{y}{b_L} + \frac{z}{c_L} = 1. \qquad (8)$$

В самом деле, возьмем из этого множества произвольную точку $M(X_M, y_M, z_M)$ и продолжим ее координату y_M до встречи с прямой L в точке M_0. Отрезок AM_0 обозначим через y'_M, а отрезок BM_0 через y''_M. Следовательно,

$$y'_M = y_M + y''_M . \qquad (9)$$

Ввиду подобия треугольников ODE и $M_0 \ldots$ будем иметь

$$\frac{c_L}{b_L} = \frac{z_M}{y''_M} \quad \text{или} \quad y''_M = \frac{b_L}{c_L} \cdot z_M . \qquad (10)$$

Заметим, что выполнение соотношения (9) и (10) обязательно для любой точки рассматриваемого множества.

Уравнение прямой L в отрезках на осях X и y будет

$$\frac{x_M}{a_L} + \frac{y'_M}{b_L} = 1 . \qquad (11)$$

Но так как по соотношениям (9) и (10)

$$y'_M = y_M + \frac{b_L}{c_L} \cdot z_M ,$$

то, подставляя значение y'_M в уравнение (11), получим

$$\frac{x_M}{a_L} + \frac{y_M + \frac{b_L}{c_L} \cdot z_M}{b_L} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x_M}{a_L} + \frac{y_M}{b_L} + \frac{z_M}{c_L} = 1 .$$

Следовательно рассматриваемое множество точек таково, что их координаты связаны уравнением плоскости. Их носитель (в этом случае прямая L), согласно определению (6), есть плоскость . Но, так как носитель вырожден в прямую, то для различия этого особого случая от других, не особых случаев, назовем такой носитель "вырожденной плоскостью". Очевидно таких вырожденных плоскостей на плоскости H можно построить сколько угодно, например, T и т.д.

Построим теперь особое множество точек $N(x_N, y_N, z_N)$, $P(x_P, y_P, z_P)$, $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ . . . . . и т.д. Особенность этого множества заключается в том, что все они визуально хотя и совпадают с одной точкой плоскости H , но, по принятому нами определению, являются "различными "точками, так как каждая из них имеет свою тройку числовых координат.

Покажем теперь прямолинейность точек указанного множества. Для этого проведем через точку плоскости H , с которой визуально совпадают рассматриваемые нами точки, две прямые L и T , отсекающие на осях X , Y , Z отрезки a_L, b_L , c_L и a_T , b_T , c_T, и примем их за вырожденные плоскости. Тогда, как было уже показано выше, получим

$$\frac{x}{a_L}+\frac{y}{b_L}+\frac{z}{c_L}=1 \quad и \quad \frac{x}{a_T}+\frac{y}{b_T}+\frac{z}{c_T}=1. \qquad (12)$$

Но рассматриваемое множество точек $M(x_M, y_M, z_M)$, $N(x_N, y_N, z_N)$ $P(x_P, y_P, z_P)$, $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ и т.д. принадлежит носителям этих вырожденных плоскостей и, как мы уже знаем, координаты его точек удовлетворяют уравнениям (12). Поэтому, согласно определению (8), рассматриваемое множество точек принадлежит одной прямой. Однако носитель-прямая этих точек -вырожден в одну точку плоскости, поэтому назовем ее " вырожденной прямой".

На основании вышеизложенного, можно заключить, что после введения на плоскости H прямоугольных координатных осей x, y, z, наши определения "точек", "прямых" и "плоскостей", равно как и "вырожденных прямых" и "вырожденных плоскостей", полностью совпадают с определениями "точек", "прямых" и "плоскостей" в аналитической геометрии. Поэтому элементы плоскости H — "точки", "прямые" и " плоскости " будут находиться в предусмотренных всеми аксиомами трехмерного пространства отношениях.

Но так как множество наших элементов, выполняя все аксиомы трехмерного пространства по первоначальному условию находятся на плоскости H, то, как отмечалось выше, целесообразно будет такую плоскость отображений назвать "расплющенным трехмерным пространством".

Теперь можно считать доказанным следующее важное утверждение:

Любое предложение или построение, имеющее место в аналитической геометрии трехмерного пространства, справедливо и для расплющенного трехмерного пространства.

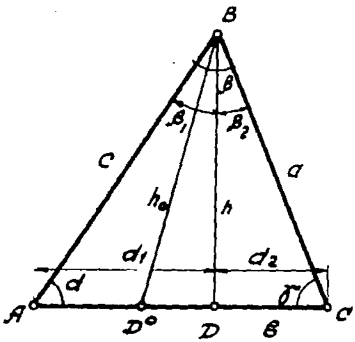


Рис. 69

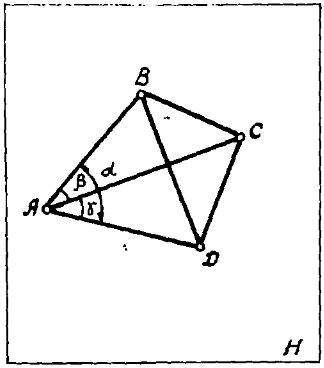


Рис. 70

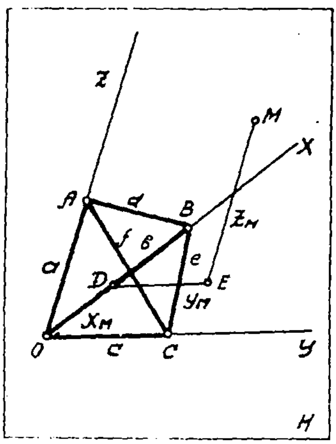


Рис. 71

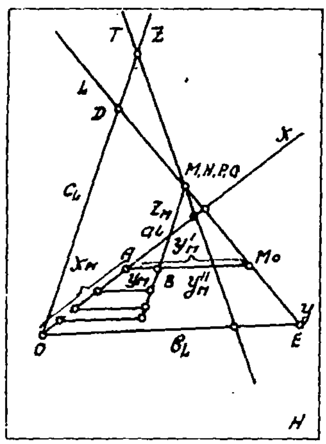


Рис. 72

ГЛАВА IУ

О ПОСТРОЕНИЯХ В ПЛОСКОСТНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 20. Задание элементов плоскостной модели трехмерного пространства

Выше мы убедились, что на проективной плоскости может быть построена плоскостная модель трехмерного проективного пространства,содержащая элементы "точки", "прямые" и "плоскости", выполняющие все аксиомы проективной геометрии. При этом, как мы видели, это было осуществлено при помощи гомологичных соответствий плоских полей, совмещенных с проективной плоскостью. Оказалось,что,интерпретируя надлежащим образом свойства гомологичных соответствий, в построениях плоскостного характера можно вложить пространственный смысл и полностью отождествить их с построениями в пространстве.

Поэтому,производя в плоскостной модели пространства какие-либо построения, мы можем,не ссылаясь на свойства перспективных соответствий и основываясь на их интерпретациях, действовать так, как в случае трехмерного пространства .

Однако,учитывая особенности плоскостной модели трехмерного пространства или, как мы назвали,расплющенного пространства, необходимо предварительно ввести облегчающие построения определенные условности.

Прежде всего следует заметить, что все доказательства, приведенные нами при построении расплющенного пространства относились к проективной плоскости. Поэтому, говоря о фактических построениях, мы имеем в виду построения, выполняемые на плоскости чертежа, являющегося евклидовой. Следовательно, для возможности использования результатов параграфов III гл., мы должны обратиться к евклидовой плоскости, дополненной несобственными элементами.

Пусть мы имеем евклидову плоскость H (рис. 73), на которой хотим построить расплющенное трехмерное пространство.

Из принятых нами определений "точки", "прямой" и "плоскости" следует, что для превращения плоскости H в расплющенное пространство эту плоскость необходимо принять носителем двух плоских полей и указать прямую, являющуюся общей для них. В самом деле, "точка" расплющенного пространства нами определена как центр гомологии, установленной между полями совмещенными с плоскостью H. Поэтому для возможности построения "точки" расплющенного пространства, плоские поля должны быть первоначально заданы, В соответствии с этим, пусть прямая a является общей для двух плоских полей α_1 и α_2. Для обозначения принадлежности прямой a к плоским полям α_1 и α_2 к букве a припишем индекс $\alpha_1\alpha_2$. Теперь, задав гомологию с центром C_b и парой соответственных точек A_{α_1} и B_{α_2}, согласно нашему определению, центр гомологии C_b явится " точкой" расплющенного пространства. Но мы условились не ссылаться на гомологичность. Поэтому, в задании гомологии вложим следующий пространственный смысл: точки A_{α_1} и B_{α_2} рассмотрим как точки, принадлежащие различным плоскостям α_1 и α_2, пересекающимся по прямой $a_{\alpha_1\alpha_2}$. Тогда точки A_{α_1} и B_{α_2} определят прямую b_{AB}, не принадлежащую ни одной из плоскостей α_1 и α_2, а точка C_b будет принадлежать прямой b_{AB}.

При таком задании "точки" C_{ℓ} она всегда сопоставляется с парой точек A_{α_1} и B_{α_2}, расположенных с ней на одной прямой, и, стало-быть, необходимо задаться гомологией с центром в точке C_{ℓ} .

Таким образом, для того чтобы точка, взятая на плоскости H , являлась точкой расплющенного пространства, необходимо приписать ей индекс о принадлежности к прямой, имеющей в свою очередь индекс о принадлежности к точкам, принадлежавшим первоначальным двум плоскостям.

Указанным способом можно построить сколько угодно "точек" расплющенного пространства. В результате получим множество "точек", в котором, как мы уже доказали в параграфах III главы, выполняются все аксиомы проективной геометрии. Основываясь на выполнимости проективных аксиом при помощи "точек" в расплющенном пространстве, сможем построить и множество "прямых" и "плоскостей".

Действительно, на основании аксиом I_I и I_2 любая пара "точек" расплющенного пространства определяет единственную прямую. При этом, так как наше множество "точек" состоит из "точек" плоскостей α_1 , и α_2 , а также "точек", находящихся в расплющенном пространстве, то пары "точек " могут быть следующие (рис.74):

1. Пара состоит из точек, принадлежащих либо плоскости α_1 , либо α_2 . Такие пары точек определяют прямые, принадлежащие плоскостям α_1 или α_2, например, e_{AE} или f_{BD} .

2. Пара состоит из точек, принадлежащих : одна плоскости α_1 , другая плоскости α_2. Такие пары точек определяют прямые, не принадлежащие плоскостям α_1 и α_2 , например, b_{AB} , c_{ED}... и т.д. Выше такие прямые были использованы нами для определения "точек".

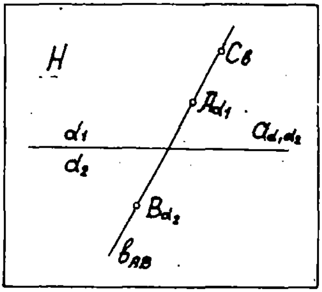


Рис. 73

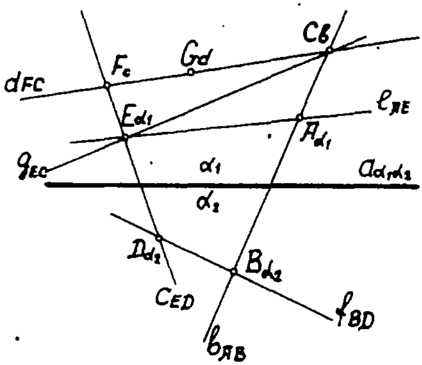


Рис. 74

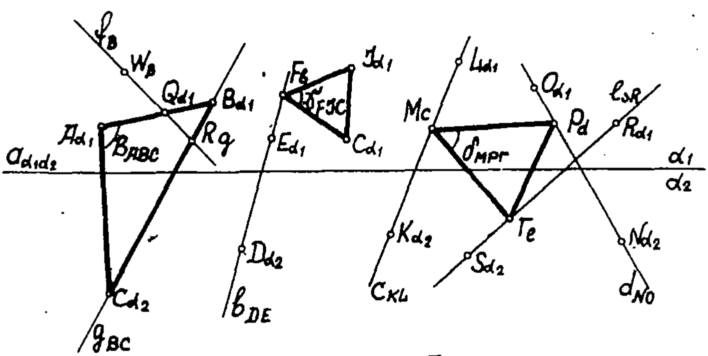


Рис. 75

3. Пара состоит из точек: одна принадлежит плоскости α_1 или α а другая лежит в расплющенном пространстве. Такие пары точек определяют прямые ,лежащие в расплющенном пространстве ,например, прямую g_{EC}.

4. Пара состоит из точек,принадлежащих расплющенному простра ству.Такой парой определяетсяпрямая,лежащая в расплющенном пространстве , например,прямая d_{FC}

На основании аксиом $\bar{I}_4$ и $\bar{I}_5$ любая тройка "точек" расплющенного пространства определяет "плоскость."

Из построенного множества "точек" тройки могут быть следующие:

I. Тройка точек состоит из одной точки плоскости α_2 и двух точек плоскости α_1,или наоборот (рис. 75) ,например,плоскость $\beta(ABC)$.

2. Тройка состоит из двух точек плоскости α_1 или α_2 и одной точки, лежащей в расплющенном пространстве, например, плоскость γ_{FJC}. Тройку можно подобрать и так, чтобы две точки принадлежали расплющенному пространству, а одна - плоскости α_1 или α_2.

3. Тройка состоит из трех точек, принадлежащих расплющенному пространству,например,плоскость δ_{MPT} .

На построенной"прямой" или плоскости, в свою очередь, можно брать точки и прямые с индексом их принадлежности к построенным "прямым" и " плоскостям".

Если на прямой d_{FC} (рис. 74) взять точку G с индексом α_1, то тогда она будет определена той парой точек, в которых прямая d_{FC} пересекает плоскости α_1 и α_2. В главе Ш мы показали , что такая пара точек всегда существует для любой прямой расплющенного пространства.

Точка или прямая с индексом принадлежности к уже построенной в расплющенном пространстве плоскости, также будут определенным элементом этого пространства. Действительно (рис.75), если произвольной прямой f приписать индекс β, то тогда точки Q_{α_1} и R_g, как заданные точки расплющенного пространства, вполне определят и прямую f_β. Любая точка W_β на прямой f_β, очевидно, также будет определенной.

§ 21. Задание расплющенного пространства расплющенным тетраэдром

Таким образом, задав на плоскости H плоские поля α_1 и α_2 с указанием их общей прямой $a_{\alpha_1\alpha_2}$, мы тем самым задаем все расплющенное пространство, ибо, как убедились, после этого можно задавать "точки"," прямые" и "плоскости". Но в дальнейшем нам будет удобно задавать расплющенное пространство несколько отличным от вышеизложенного способом, хотя этот способ, в конечном итоге, сводится опять-таки к заданию двух плоских полей, совмещенных с плоскостью H.

Пусть на плоскости H заданы два плоских поля α_1 и α_2 с общей прямой a_{12} (рис. 76). Возьмем в плоском поле α_1 точку C_{α_1}, а в плоском поле α_2 точку D_{α_2}. Затем на прямой a_{12} выберем произвольные точки A и B и примем их принадлежащими прямой a_{12}, тогда в соответствии с нашим соглашением об индексах, точкам A и B можем приписать индекс $\alpha_1\alpha_2$. Далее, точку C_{α_1} соединим прямыми с точками $A_{\alpha_1\alpha_2}$, $B_{\alpha_1\alpha_2}$ и D_{α_2}. Очевидно, четырехугольник $A_{\alpha_1\alpha_2} B_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_1} D_{\alpha_2}$ в расплющенном пространстве, заданном парой плоских полей α_1 и α_2, является расплющенным тетраэдром так как точка C_{α_1} не принадлежит плоскости α_2, а потому прямые $C_{\alpha_1}A_{\alpha_1\alpha_2}$, $C_{\alpha_1}B_{\alpha_1\alpha_2}$, $C_{\alpha_1}D_{\alpha_2}$ не будут принадлежать этому плоскому полю. Точки $A_{\alpha_1\alpha_2}, B_{\alpha_1\alpha_2}, C_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}$ следует уже считать вершинами, а четыре тройки из этих вершин гранями тетраэдра, которые в расплющенном пространстве определяют четыре плоскости: $\alpha_1-(A_{\alpha_1\alpha_2}, C_{\alpha_1}, B_{\alpha_1\alpha_2})$, $\alpha_2-(A_{\alpha_1\alpha_2}, B_{\alpha_1\alpha_2}, D_{\alpha_2})$ $\alpha_3-(A_{\alpha_1\alpha_2}, C_{\alpha_1}, D_{\alpha_2})$ и $\alpha_4-(C_{\alpha_1}, B_{\alpha_1\alpha_2}, D_{\alpha_2})$.

В отличие от случая, при котором расплющенное пространство было задано парой плоских полей, при задании его расплющенным тетраэдром на плоскости H мы имеем четыре первоначальных поля: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4, благодаря чему прямые можно задавать любой парой точек, принадлежащих какой-либо паре из четырех этих плоских полей. Например (рис.76), прямая a_{EF} задана точками E_{α_1} и F_{α_2}, из которых одна принадлежит полю α_1, а другая – полю α_2. Прямая же b_{JK} задана точками J_{α_3} и K_{α_4}, принадлежащими полям α_3 и α_4. Очевидно, так могут быть заданы сколько угодно прямых, при помощи которых, как мы знаем, могут быть заданы точки, принадлежащие уже расплющенному пространству, как, например, M_a, N_b ... и т.п. Особенно удобно задавать плоскости точками, лежащими на ребрах расплющенного тетраэдра. Так, если ребра тетраэда обозначить через a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6, то любая тройка точек, принадлежащая ребрам, в расплющенном пространстве определит плоскость, как например, плоскости α_5 и α_6, заданные тройками точек O_{a_5}, P_{a_4}, R_{a_3} и S_{a_2}, T_{a_1}, L_{a_3}. Конечно, плоскости можно задавать и любыми тройками точек расплющенного пространства, что следует из выполнимости аксиом I_4 и I_5, но, как увидим ниже, построения такими плоскостями сложнее, чем построения, производимые при помощи плоскостей, заданных точками, принадлежащими ребрам расплющенного тетраэдра.

В параграфе I4 ,Ш гл. мы особо отметили существование в расплющенном пространстве вырожденных "прямых" и „плоскостей", особенность которых состоит: для "прямой" в совпадении всех принадлежащих ей "точек " с одной точкой плоскости H , а для „плоскости" в совпадении всех принадлежащих ей "точек" и "прямых" с одной прямой плоскости H [I]. Теперь рассмотрим особенности их задания в расплющенном пространстве. Вырожденные "прямые" и "плоскости" расплющенного пространства так же, как и невырожденные задаются парой "различных точек" и тройкой "точек", не принадлежащих одной "прямой". Но из предыдущих параграфов мы знаем, что "различность" точек в расплющенном пространстве не всегда совпадает с визуальной различностью точек плоскости H или плоскости отображений. Нам известна "различность точек", совпадающих с одной точкой плоскости H . Например (рис. 77) ,так как точки E_{α_1} и F_{α_2} , судя по индексам, являются различными точками, хотя и совпадают с одной и той же точкой плоскости H ,то по аксиомам $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$ они определяют единственную прямую ℓ_{EF} , все точки которой также должны совпадать с этой точкой. В самом деле, каждая из них, рассмотренная как центр перспективы, ставящего в соответствие пару точек E_{α_1} и F_{α_2} , не может находиться вне точки плоскости H , с которой совпадают точки E_{α_1} и F_{α_2} . Следовательно, для задания в расплющенном пространстве вырожденной прямой достаточно любой точке плоскости H приписать обозначение двух точек, принадлежащих какой-либо паре уже определенных плоскостей расплющенного пространства, например, a_{yK} . . . и т.д.

I) Проективную плоскость, на которой строится расплющенное пространство, в дальнейшем иногда будем называть плоскостью отображений.

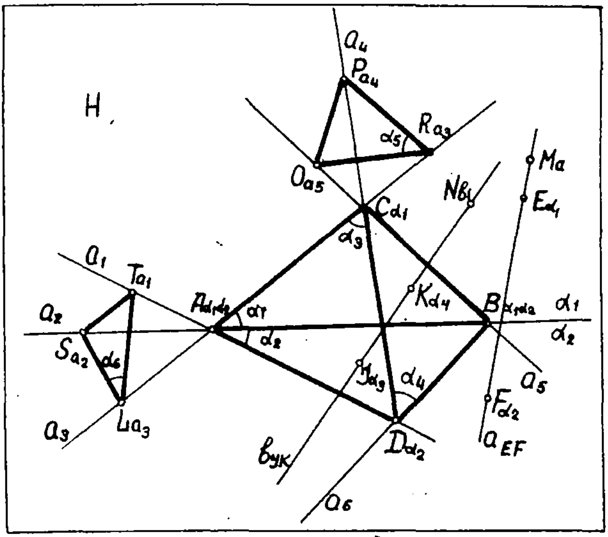


Рис.76

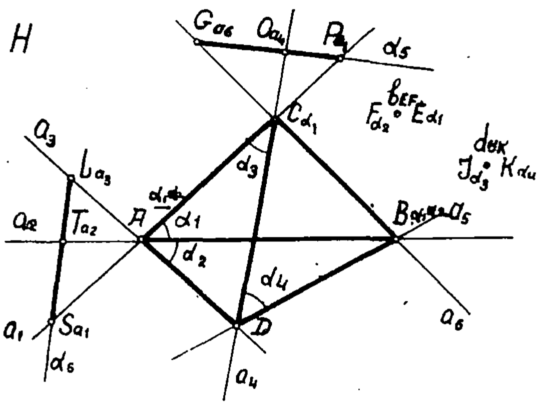


Рис.77

Для задания вырожденной плоскости следует выбрать любые три "точки ",не принадлежащие одной "прямой". Однако эти три "точки",не находясь на олной"прямой" расплющенного пространства, на плоскости отображений визуально должны совпадать с одной прямой. Из параграфа I4 ,Ш гл. нам известно существование таких "точек" расплющенного пространства. Три "точки" G_{a_6}, O_{a_4} и P_{a_1} (рис. 77), судя по индексам,принадлежат прямым a_6, a_4 и a_1 не лежащим на одной плоскости. Из этих прямых , a_6 и a_1 расположены в плоскости α_1, прямая же a_4 , как ребро расплющенного тетраедра, не лежит в плоскости α_1 определяемой гранью тетраэдра $A_{\alpha_1\alpha_2}, C_{\alpha_1}, B_{\alpha_1\alpha_2}$. Поэтому, точки $G_{a_6}, O_{a_4}, P_{a_1}$ не могут принадлежать одной прямой. Следовательно,согласно аксиомам $\bar{I}_4$ и $\bar{I}_5$ они определяют единственную вырожденную "плоскость" α_5 . Аналогично, три "точки" S_{a_1}, T_{a_2} и L_{a_3},принадлежащие прямым a_1 , a_2 и a_3 , но визуально совпадающие с одной прямой плоскости отображений H., также определяют некоторую вырожденную "плоскость" α_6 рассматриваемого расплющенного пространства. Очевидно таким образом можно задавать сколько угодно вырожденных плоскостей.

§ 22. Построения, соответствующие основным теоремам

Теперь осуществим графически построения,соответствующие основным, для начертательной геометрии,теоремам I,2 и 3, справедливость которых для расплющенного пространства была показана в параграфе I6, Ш гл.

ТЕОРЕМА I. Пусть в расплющенном пространстве,определенном тетраэдром $ABCD$, заданы две плоскости (рис.78). Плоскость

α_5 определена тройкой точек $E_{a_1\alpha_5}$, $G_{a_3\alpha_5}$, $F_{a_2\alpha_5}$, а плоскость α_6 точками $J_{a_2\alpha_6}$, $H_{a_1\alpha_6}$, $K_{a_3\alpha_6}$. Построим прямую пересечения этих двух плоскостей, которая, согласно теореме I, всегда существует.

Снимем индексы со всех точек на рис. 78. Тогда точки, образующие расплющенное пространство, окажутся просто точками на проективной плоскости. Построим точки пересечения R, P, L сторон треугольников GEF и HJK. Так как по первоначальному условию на проективной плоскости справедливость теоремы Дезарга принята без доказательства, то можем заключить, что точки R, P, L лежат на одной прямой. Теперь восстановим все снятые индексы и покажем, что в расплощенном пространстве точки R, P, L существуют, и притом принадлежат одной прямой. Визуально точки R, P, L являются пересечением прямых ($E_{a_1\alpha_5} G_{a_3\alpha_5} \times H_{a_1\alpha_6} K_{a_3\alpha_6}$) ($F_{a_2\alpha_5} G_{a_3\alpha_5} \times J_{a_2\alpha_6} K_{a_3\alpha_6}$) и ($E_{a_1\alpha_5} F_{a_2\alpha_5} \times J_{a_2\alpha_6} H_{a_1\alpha_6}$). Первая пара прямых лежит в плоскости α_3, вторая в – α_2, а третья в – α_1. Поэтому, в соответствии с аксиомой $\bar{I}_9$, точки R, P, L существуют в расплющенном пространстве с индексами о принадлежности одновременно к плоскостям α_5 и α_6. По аксиомам $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$ точки $L_{\alpha_5\alpha_6}$ и $P_{\alpha_5\alpha_6}$ определяют единственную прямую $a_{7\alpha_5\alpha_6}$. На основании аксиомы $\bar{I}_6$ можем утверждать, что все точки прямой a_7 одновременно принадлежат плоскостям α_5 и α_6. Но точка R, являясь пересечением прямых $E_{a_1\alpha_5} G_{a_3\alpha_5}$ и $H_{a_1\alpha_6} K_{a_3\alpha_6}$, имеет тот же индекс $\alpha_5\alpha_6$, стало-быть, она принадлежит прямой a_7. Таким образом, прямая a_7 есть пересечение плоскостей α_5 и α_6.

На основании аксиом связи и теоремы I легко доказывается теорема Дезарга для треугольников, принадлежащих расплющенному пространству.

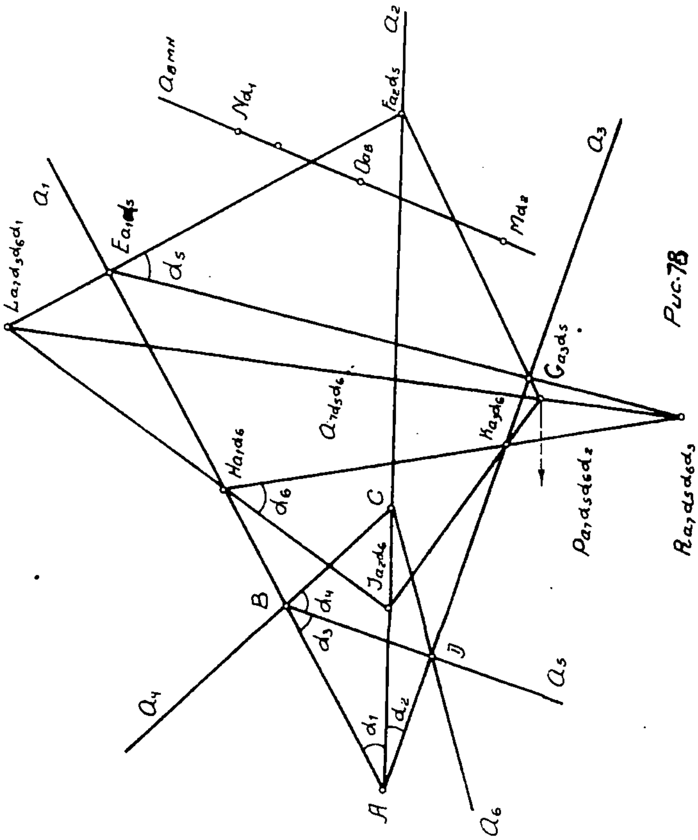

A
B
C
α_1
α_2
α_3
α_4
α_5
α_6
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6

Рис.78

<u>ТЕОРЕМА 2</u>. По этой теореме, прямая имеет единственную общую точку с любой не принадлежащей ей плоскостью. Пусть (рис. 79) точками E_{α_1} и F_{α_2} определена прямая b_{EF}. Так как эта прямая соединяет точки, не принадлежащие ни одной из основных прямых a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6, то поэтому она не принадлежит ни однойиз плоскостей α_1, α_2, α_3 и α_4, в связи с чем существуют четыре точки, общие для прямой b_{EF} и плоскостей α_1, α_2, α_3 и α_4. Общими точками для прямой b_{EF} и плоскостей α_1 и α_2 являются точки E_{α_1} и F_{α_2}. Для построения общих точек с плоскостями α_3 и α_4, построим произвольную плоскость α_5, принадлежащую прямой b_{EF}. Тогда плоскость α_5 будет иметь единственную общую прямую $G_{a_1\alpha_5} J_{a_3\alpha_5}$ с плоскостью α_3 и прямую $L_{\alpha_4\alpha_5} K_{\alpha_4\alpha_5}$ с плоскостью α_4. Прямая $G_{\alpha_1\alpha_5} J_{a_3\alpha_5}$ с прямой b_{EF} имеет одну общую точку $M_{\alpha_3 b}$, которая будет общей для прямой b_{EF} и плоскости α_3. Действительно, она принадлежит прямой $G_{a_1\alpha_5} J_{a_3\alpha_5}$ лежащей на плоскости α_3. С другой стороны, прямая b_{EF} пересекается также с прямой $L_{\alpha_4\alpha_5} K_{\alpha_4\alpha_5}$ в точке $P_{\alpha_4 b}$. Эта точка является общей для прямой b_{EF} и плоскости α_4, так как принадлежит прямой $L_{\alpha_4\alpha_5} K_{\alpha_4\alpha_5}$, лежащей на плоскости α_4.

Таким образом, мы имеем четыре точки E_{α_1}, F_{α_2}, $M_{\alpha_3 b}$ и $P_{\alpha_4 b}$, общие для прямой b_{EF} и плоскостей α_1, α_2, α_3 и α_4. Покажем, что расположение этих точек на прямой b_{EF} не зависит от вспомогательной плоскости α_5. Действительно, построим другую плоскость α_6, проходящую через прямую b_{EF}, которой на основных прямых a_1, a_2, a_3 соответствуют три точки $G_{a_1\alpha_6}$, $J_{a_3\alpha_6}$, $H_{a_2\alpha_6}$. Прямая $G_{a_1\alpha_6} J_{a_3\alpha_6}$ пересечет прямую b_{EF} в той же точке $M_{\alpha_3 b}$, в которой пересекла прямая $G_{a_1\alpha_5} J_{a_3\alpha_5}$, так как для треугольников $G_{a_1\alpha_5} G_{a_1\alpha_6} E_{\alpha_1}$ и J_{a_3} $J_{a_3\alpha_6} F_{\alpha_2}$ точка $M_{a_3 b}$ является точкой Дезарга, а прямая $L_{\alpha_4\alpha_6}K_{\alpha_4\alpha_6}$, общая для плоскостей α_4 и α_6, пересечет прямую b_{EF} в той же точке $P_{\alpha_4 b}$, в которой пересекла ее прямая $L_{\alpha_4\alpha_5}K_{\alpha_4\alpha_5}$, в силу того, что $P_{\alpha_4 b}$ представляет точку Дезарга для треугольников $L_{\alpha_4\alpha_5}L_{\alpha_4\alpha_6}E_{\alpha_1}$ и $K_{\alpha_4\alpha_5}K_{\alpha_4\alpha_6}M_{\alpha_3 b}$. Отсюда заключаем, что положение точек $M_{\alpha_3 b}$ и $P_{\alpha_4 b}$ на прямой b_{EF} не зависит от выбора вспомогательной плоскости α_5, при помощи которой они были построены. Аналогично можно построить пересечение любой плоскости с любой не принадлежащей ей прямой.

ТЕОРЕМА 3. На основании этой теоремы, в расплющенном пространстве можно построить единственную точку принадлежащую трем различным плоскостям.

Действительно, пусть α_4, α_5, α_6, три различные плоскости расплющенного пространства, определенного тетраэдром $ABCD$. (рис.79). Построим существующие по теореме I попарные пересечения этих плоскостей. Это будут прямые $E_{\alpha_1}F_{\alpha_2}$, $L_{\alpha_4\alpha_5}K_{\alpha_4\alpha_5}$, $L_{\alpha_4\alpha_6}K_{\alpha_4\alpha_6}$. Так как указанные прямые соединяют точки треугольников $L_{\alpha_4\alpha_5}L_{\alpha_4\alpha_6}E_{\alpha_1}$ и $K_{\alpha_4\alpha_5}K_{\alpha_4\alpha_6}M_{\alpha_3 b}$, удовлетворяющих условию Дезарга, то они проходят через одну точку $P_{\alpha_4 b}$, которая и является единственной общей точкой плоскостей α_4, α_5 и α_6, ибо одновременно принадлежит трем указанным прямым, лежащим в этих же плоскостях.

Вышеприведенные построения, соответствующие трем основным теоремам, были показаны для элементов расплющенного пространства, заданных при помощи прямых и граней расплющенного тетраэдра. Однако, как мы знаем, этими элементами могут быть заданы последующие элементы расплющенного пространства, также удовлетворяющие требованиям теорем I,2.3 и поэтому для них также могут быть выполнены построения, аналогичные вышепри-

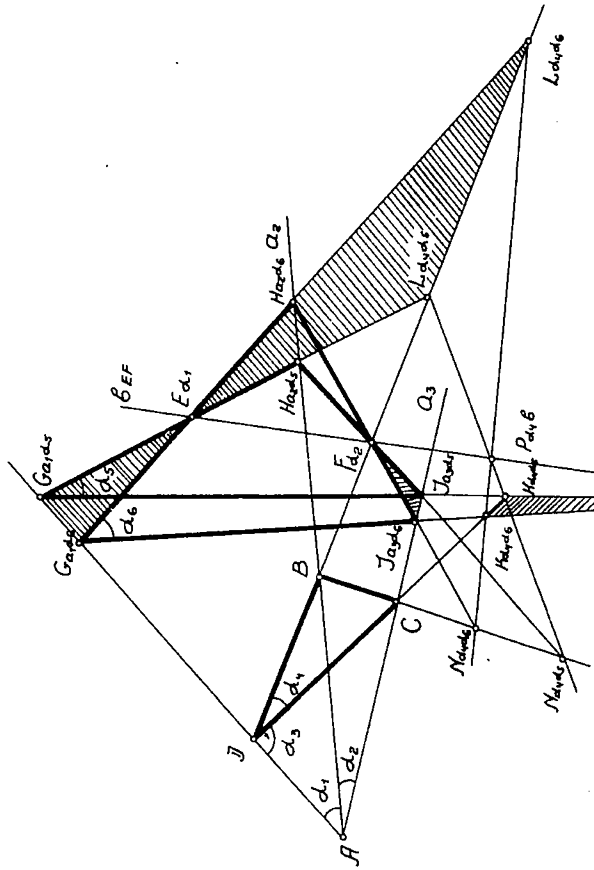


Рис. 79

веденным. В справедливости этого утверждения можем убедиться, если покажем, что прямые или плоскости заданные в расплющенном пространстве точками, принадлежащими этому пространству, определенному тетраэдром, при помощи определенных построений могут быть превращены в прямые и плоскости, определенные элементами этого же тетраэдра.

Например, три точки (рис.80) M_b, N_c, L_d принадлежат прямым b, c, d, заданным точками плоскостей, определенных гранями α_1 и α_2 расплющенного тетраэда $ABCD$. Так как указанные точки не расположены на одной прямой, то они определяют некоторую плоскость рассматриваемого расплющенного пространства. Этой плоскости на ребрах тетраэдра соответствуют три точки. Построим эти три точки. Точками $F_{\alpha_2}, K_{\alpha_2}, P_{\alpha_1}$ построим плоскость α_5. Тогда прямая $F_{\alpha_2}L_d$ будет принадлежать этой плоскости и с плоскостями α_1 и α_2 имеет общие точки Q_{α_1} и F_{α_2}. Теперь тремя точками $E_{\alpha_1}, Q_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}$ построим плоскость α_6. В этой плоскости лежит прямая M_bL_d, которая с плоскостью α_1 имеет общую точку R_{α_1}, а с плоскостью α_2 точку S_{α_2}. Далее, для точек $F_{\alpha_2}, J_{\alpha_2}, G_{\alpha_1}$ построим плоскость α_7. В этой плоскости будет лежать прямая $F_{\alpha_2}N_c$, встречающая плоскость α_1 в точке T_{α_1}. При помощи $T_{\alpha_1}, E_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}$ построим теперь плоскость α_8. В этой плоскости лежит прямая M_bN_c, которая встречает плоскости α_1 и α_2 в точках U_{α_1} и V_{α_2}. Таким образом, получим, что прямые M_bN_c и M_bL_d пересекаются в точке M_b и определены точками основных плоскостей U_{α_1}, V_{α_2} и S_{α_2}, R_{α_1}. Прямые $U_{\alpha_1}R_{\alpha_1}$ и
$V_{\alpha_2}S_{\alpha_2}$ пересекаются на прямой a_2 в одной точке H_{α_2}, так как при снятии индексов является точкой Дезарга для треугольников $W_{\alpha_6}R_{\alpha_1}S_{\alpha_2}$ и $U_{\alpha_1}V_{\alpha_2}X_{\alpha_8}$, выполняющих условие теоремы Дезарга. Соответствующие стороны указанных треугольников пересекаются в

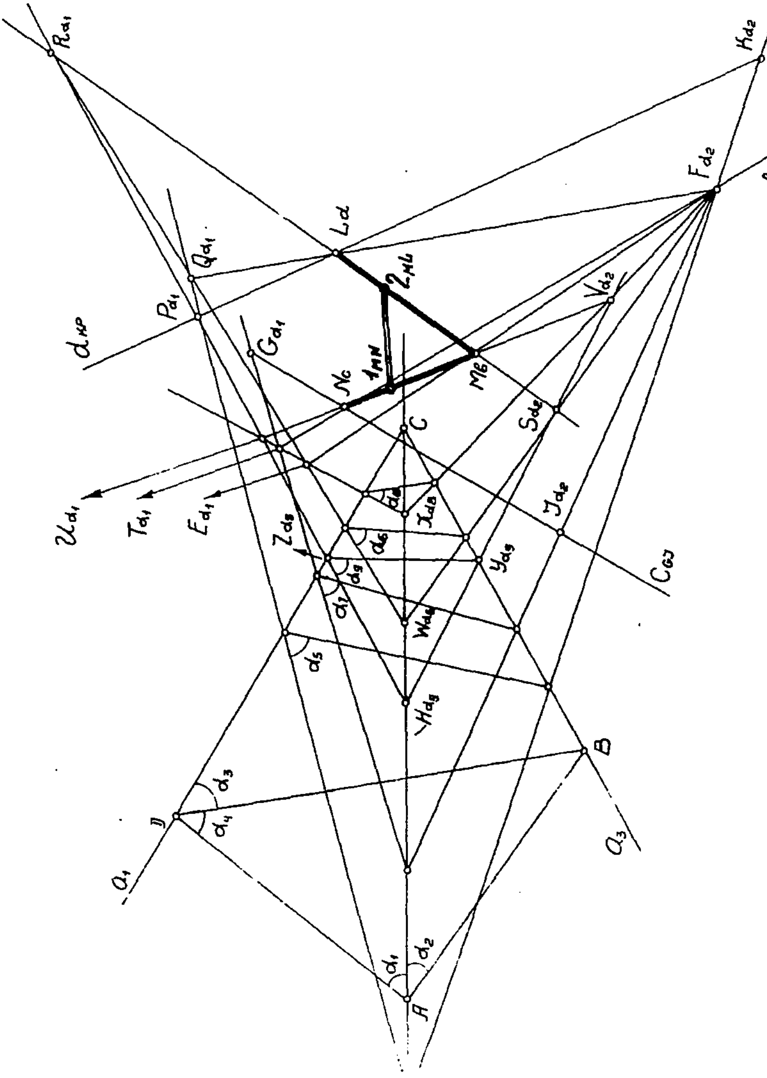


Рис.80

точках E_{α_1}, M_b и F_{α_2} лежащих на одной прямой b_{EF}. Следовательно, на основных прямых мы построили три точки H_{α_9}, Z_{α_1} и Y_{α_1}, соответствующие плоскости трех точек M_b, N_c, L_d не лежащих на одной прямой и взятых при помощи прямых b_{EF}, C_{GJ} и d_{KP} связанных с основными плоскостями α_1 и α_2. Если же точки M_b, N_c и L_d будут заданы плоскостями, то построением прямых, проходящих через данные точки, этот случай всегда можно свести к рассмотренному выше случаю.

Однако возникает естественный вопрос о справедливости показанного построения для последующих элементов, заданных при помощи уже построенных. Это относится, например (рис.80), к точкам 1_{MN} и 2_{ML}. Если будет показана возможность сведения и этих точек к точкам, заданным при помощи точек расплющенного тетраэдра, то такой же вопрос возникнет для точек заданных прямой $1_{MN}2_{ML}$ и т.д. Поэтому задачу нужно решить обобщенно для всех элементов расплющенного пространства, как бы они ни были определены. Для этого следует обратиться к гомологичному соответствию плоских полей α_1 и α_2. Во втором параграфе III гл., при построении расплющенного пространства " точки " были определены как центры гомологий, установленных между полями α_1 и α_2. Поэтому задание "точки" равносильно заданию гомологии, а это последнее сводится либо к существованию на плоскости отображений центра гомологии и пары точек, принадлежащих плоскостям α_1 и α_2, либо к существованию центра перспективы и возможности построения этой пары. Следовательно, задание "элементов" расплющенного пространства обеспечивает существование возможности их превращения в " элементы", заданные точками первоначального расплющенного тетраэдра. Таким образом, построения, соответствующие теоремам 1,2 и 3 осуществимы для любых элементов расплющенного пространства , и при этом могут быть выполнены все построения, вытекаемые из этих основных теорем.

Теперь покажем осуществимость указанных построений и для вырожденных "прямых " и " плоскостей" расплющенного пространства. Прежде всего заметим ,что ,так как все элементы вырожденной плоскости визуально совпадают с прямой плоскости отображений,то построения,соответствующие плоскостным аксиомам,не прибегая к свойствам гомологичности (а мы условились не пользоваться ими),не могут быть выполнены в самой вырожденной плоскости. Например (рис. 8I),в вырожденной плоскости α_5 заданные две прямые $b_{\jmath k}$ и d_{op} по аксиоме $\overline{I}_9$ имеют общую точку. Однако эта точка не может быть построена непосредственным пересечением заданных прямых,как мы это сделали бы для прямых невырожденной плоскости. Возможность осуществления всех плоскостных построений над элементами вырожденной плоскости, в общем следует из возможности проектирования элементов этой плоскости на другую невырожденную плоскость. В частности,все элементы вырожденной плоскости (это было прказано в Ш главе) должны быть спроектированы на другую невырожденную плоскость, а затем результаты желаемых построений,произведенных на этой плоскости, перепроектированы обратно на вырожденную плоскость. В соответствии с этим,для построения точки пересечения прямых $b_{\jmath k}$ и d_{op} спроектируем их из произвольной точки S_{q_1} ,не принадлежащей вырожденной плоскости, на произвольную невырожденную плоскость, например на α_2 . Точки J_{α_1} и O_{α_1} спроектируются на прямую a_2 в точки $J^o_{\alpha_1}$ и $O^o_{\alpha_1}$. Точки K_{α_2} и P_{α_2} ,как точки принадлежащие плоскости α_2,останутся на месте. Парами точек $J^o_{\alpha_1}$, K_{α_2} и $O^o_{\alpha_1}$, P_{α_2} определяются прямые $b^o_{\jmath k}$ и d^o_{op}, являющиеся проекциями прямых $b_{\jmath k}$ и

d_{op} из центра проектирования S_{a_1} на плоскость α_2. Непосредственным пересечением этих прямых построим точку M_0, проектированием которой из центра S_{a_1} обратно на плоскость α_5 получим точку $M_{\alpha_5 bd}$, являющуюся искомым пересением прямых b_{JK} и d_{op}.

Построения, соответствующие основным теоремам для вырожденных элементов, выполняются чрезвычайно просто. Пусть даны две вырожденные плоскости α_5 и α_6 (рис. 82). Точка пересечения прямых α_5 и α_6 есть вырожденная прямая $b_{\alpha_5\alpha_6}$,-пересечение плоскостей α_5 и α_6. Действительно, прямая $b_{\alpha_5\alpha_6}$-определяется тремя точками, общими для плоскостей α_5 и α_6. Из этих трех точек одна M_{α_1} представляет пересечение прямых $E_{a_1}F_{a_2} \times J_{a_1}K_{a_2}$ и принадлежит плоскости α_1, вторая N_{α_2} - пересечение прямых $G_{a_3}F_{a_2} \times K_{a_2}L_{a_3}$ и принадлежит плоскости α_2, а третья T_{α_3} - пересечение прямых $E_{a_1}G_{a_3} \times J_{a_1}L_{a_3}$ и лежит на плоскости α_3.

Прямая пересечения невырожденной плоскости α_7 (рис. 82) с вырожденной α_5 очевидно, определится точками $V_{\alpha_3\alpha_5\alpha_7}$ и $W_{\alpha_2\alpha_5\alpha_7}$.

Точка пересечения данной прямой с вырожденной плоскостью строится особенно легко и не требует построения вспомогательной плоскости, проходящей через данную прямую, ибо ее пересечение с носителем вырожденной плоскости (прямой) на плоскости отображений дает искомую точку. Например (рис.83), если α_5 вырожденная плоскость, а b_{JK}-прямая, то искомой точкой пересечения этой прямой с плоскостью α_5 будет точка $M_{\alpha_5 b}$.

Построение общей точки трех различных, не принадлежащих одной прямой, вырожденных плоскостей требует предварительных пояснений параллельности элементов расплющенного пространства.

Следует вспомнить, что пока мы рассматриваем проективные аксиомы и вытекающие отсюда проективные свойства расплющенного

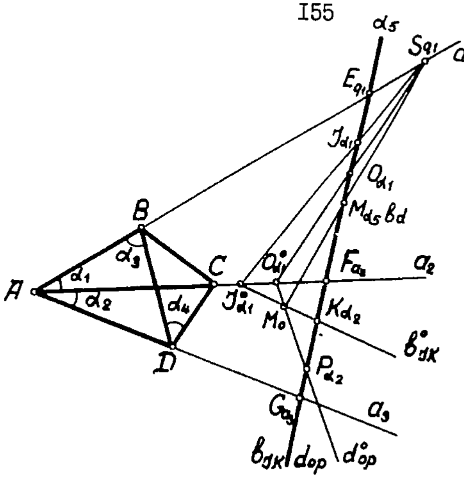


Рис. 81

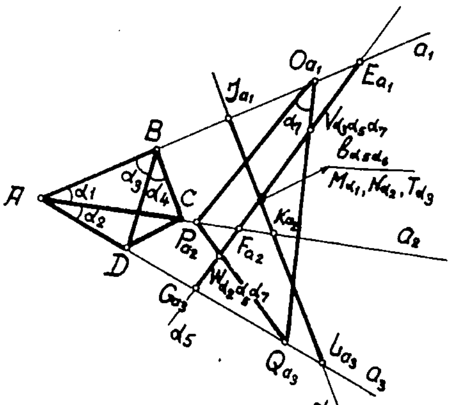


Рис. 82

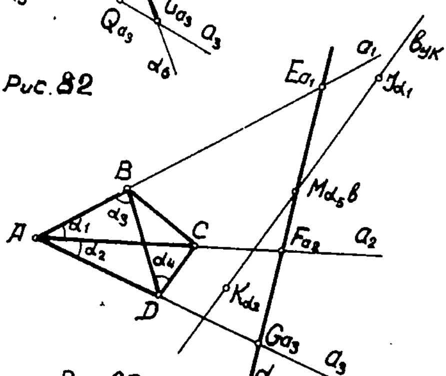


Рис. 83

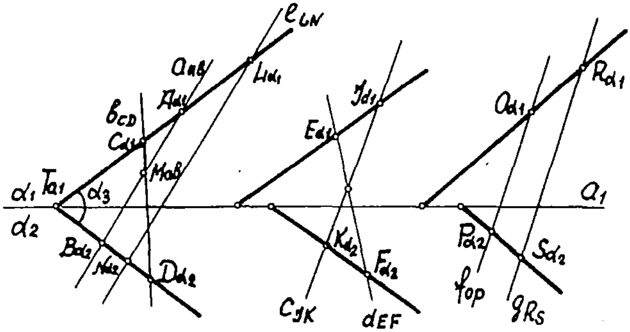
пространства. Параллельность прямых и плотностей также будет рассматриваться с проективной точки зрения, т.е. как пересечение прямых и плоскостей в несобственных элементах.

В связи с этим следует рассмотреть признаки, по которым в расплющенном пространстве можно усмотреть различие между скрещивающимися прямыми и пересекающимися или параллельными, ибо непосредственное рассматривание плоскости отображений недостаточно для установления указанного различия. На плоскости отображений, скрещивающиеся прямые визуально пересекаются так же, как и пересекающиеся, или визуально параллельные прямые могут оказаться скрещивающимися и т.д.

Исходной точкой при определении взаимного расположения двух прямых в расплющенном пространстве будет аксиома $\overline{I}_9$, по которой две прямые имеют общую точку, если они принадлежат одной и той же плоскости. Отсюда, очевидно, прямые, не удовлетворяющие требованию этой аксиомы, не имеют общей точки, и стало-быть, являются скрещивающимися. На основании этого прямые a_{AB} и b_{CD} (рис.84) пересекаются в точке M_{ab}, так как принадлежат одной и той же плоскости α_3. В самом деле, точки $A_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}$ и $C_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}$, принадлежащие плоским полям α_1, α_2 и определяющие прямые a_{AB} и b_{CD}, подобраны так, что в плоскостях α_1 и α_2 определяют прямые $A_{\alpha_1} C_{\alpha_1}$ и $B_{\alpha_2} D_{\alpha_2}$ пересекающие прямую a_1 в одной точке T_{a_1}. Прямые C_{JK} и d_{EF}, наоборот, не удовлетворяют этому условию, и следовательно, являются скрещивающимися. Однако прямые a_{AB} и e_{LN}, также принадлежащие плоскости α_3, пересекаются в определенной точке расплющенного пространства, которую нельзя построить на плоскости отображений, так как прямые подобраны визуально параллельными. Таким образом, для параллельности прямых в расплющенном пространстве недостаточна их визуальная параллельность. Необходимо также, чтобы эти прямые располагались в одной и той же плоскости. Например, прямые f_{OP} и g_{RS} хотя визуально и параллельны, но для расплющенного пространства, определенного парой полей α_1 и α_2, являются скрещивающимися.

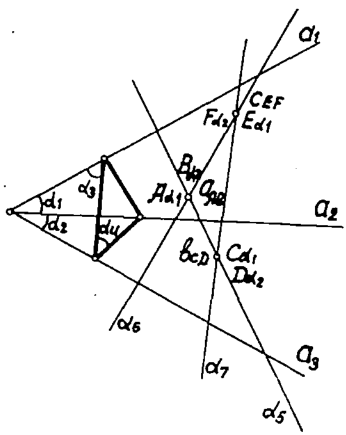
В соответствии с вышеизложенным, легко убедиться, что все вырожденные прямые параллельны между собой и представляют пучок прямых с одним общим несобственным центром. Действительно, пусть мы имеем произвольную пару вырожденных прямых a_{AB} и b_{CD} (рис. 85) расплющенного пространства, заданного плоскостями α_1, α_2, α_3 и α_4. Нетрудно видеть, что эти вырожденные прямые принадлежат единственной вырожденной плоскости α_5. Поэтому прямые a_{AB} и b_{CD} непременно пересекаются в единственной точке. Но эта точка на плоскости отображений фактически не может быть построена, так как прямые a_{AB} и b_{CD} нельзя "продолжить". Это дает возможность допустить, что они пересекаются в несобственной точке расплющенного пространства, т.е. являются " параллельными" . Те же рассуждения могут быть применены и для пар вырожденных прямых c_{EF} и a_{AB} или b_{CD} и c_{EF} , лежащих в вырожденных плоскостях α_6 и α_7 и т.д.

Продолжая таким образом и исходя из существования на каждой прямой единственной несобственной точки, убеждаемся, что все вырожденные прямые имеют одну общую несобственную точку. В самом деле, пара вырожденных прямых a_{AB} и b_{CD} имеет одну общую несобственную точку , которая является общей и для пары b_{CD} и c_{EF} . Следовательно, для вырожденных прямых a_{AB} и c_{EF} она является также общей. Так, по исходя от одной вырожденной



ℓ_{LN}
a_{AB}
L_{α_1}
A_{α_1}
b_{CD}
C_{α_1}
M_{aB}
α_1
T_{a_1}
α_3
α_2
B_{α_2}
N_{α_2}
D_{α_2}
J_{α_1}
E_{α_1}
K_{α_2}
F_{α_2}
c_{JK}
d_{EF}
R_{α_1}
O_{α_1}
a_1
P_{α_2}
S_{α_2}
f_{OP}
g_{RS}

Рис. 84



a_1
c_{EF}
F_{α_2}
E_{α_1}
α_3
B_{α_2}
A_{α_1}
a_{AB}
α_1
α_2
a_2
α_4
b_{CD}
C_{α_1}
D_{α_2}
α_6
α_7
a_3
α_5

Рис. 85

прямой к другой, мы убеждаемся в справедливости вышеуказанного утверждения.

Теперь легко усмотреть для вырожденных плоскостей построение, соответствующее третьей теореме. Точкой пересечения (рис. 85) трех плоскостей α_5, α_6 и α_7 будет общая точка выраженных прямых пересечения a_{AB}, b_{CD} и c_{EF}. Эта точка, как мы видели, " несобственная".

§ 23. Проективная геометрия расплющенного пространства

Построенное расплющенное пространство являются геометрической формой третьей ступени, и поэтому между формами, находящимися внутри него, возможно установить взаимно однозначное, проективное соответствие. Такая возможность очевидна. Более того, в расплющенном пространстве может быть построена вся проективная геометрия. При этом так, что нигде не будет прервана последовательность необходимых для этого известных рассуждений. Для показа справедливости того или иного проективного предложения, следует дословно повторить соответствующие доказательства, при этом всегда имея в виду особенности расплющенного пространства. Все это основывается на показанной нами выполнимости в расплющенном пространстве проективных аксиом всех трех групп; I_9 аксиом связей или принадлежности, II_{1-4} порядка и III_1 непрерывности.

Прежде всего заметим, что в расплющенном пространстве, на основании выполнимости проективных аксиом, могут быть построены геометрические формы первой и второй ступеней. Как

///

было показано выше, в расплющенном пространстве на любой плоскости могут быть взяты прямые и точки. Для этого необходимо каждой прямой или точке приписать индекс обозначения плоскости. Например, пусть прямая a принадлежит плоскости α , тогда точки A_a, B_a, C_a, D_a... и т.д. На этой прямой представят прямолинейный ряд точек с носителем a . Однако, как мы знаем, носитель-прямая в расплющенном пространстве может выродиться в точку. Такой носитель также содержит точки, только для определения линейного порядка точек уже недостаточна их принадлежность носителю, необходима их принадлежность в отдельности какому-либо невырожденному носителю-прямой или плоскости. Так, например, если b - вырожденный в точку носитель- прямая, то ряд A_b, B_b, C_b, D_b. не будет рядом точек определенного линейного порядка. Для определенности линейного порядка точек ряд следует записать так: $A_{b\alpha_1}$. $B_{b\alpha_2}$ $C_{b\alpha_3}$, $D_{b\alpha_4}$... или A_{ba_1}, B_{ba_2}, C_{ba_3}, D_{ba_4}..... Где в первом случае , α_1 , α_2 , α_3, α_4.. – невырожденные плоскости, определенные в рассматриваемом расплющенном пространстве, а a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ... - невыржденные прямые того же пространства. Если A_α-некоторая точка определенной плоскости в расплющенном пространстве ,то прямые $a_{A\alpha}$, $b_{A\alpha}$, $c_{A\alpha}$, $d_{A\alpha}$...- пучек прямых. Если A_α некоторая точка плоскости α, а A_{a_1}, B_{a_1}, C_{a_1}, D_{a_1}..–прямолинейный ряд точек с носителем прямой a_1 , то множество прямых $b_{A_\alpha A_{a_1}}$, $c_{A_\alpha B_{a_1}}$, $d_{A_\alpha C_{a_1}}$, $e_{A_\alpha D_{a_1}}$.. будет также плоским пучком прямых. Действительно, точкой A_α и прямой a_1 определится некоторая плоскость, а прямые b , c , d , e ... будут прямыми, принадлежащими этой плоскости .При помощи прямой и не принадлежащей ей точкой пучок прямых может быть взят и в вырожденной плоскости расплющенного пространства. Пусть α_5 (рис.86)-вырожденная плоскость, определенная двумя основными прямыми a_1 и a_2, пересекающимися в точке $A_{a_1 a_2}$. В этой вырожденной плоскости с помощью точек $B_{a_3 a_2}$ и $C_{a_1 a_3}$ определим прямую a_3 и возьмем ряд точек $B_{a_3 a_2}$, $C_{a_1 a_3}$, D_{a_3}, E_{a_3}, принадлежащих этой прямой. Далее, возьмем точку S_{a_1} не принадлежащую прямой a_3. Тогда прямые a_{1SC}, a_{5SB}, a_{6SD}, a_{7SE}.. представят пучок прямых вырожденной плоскости α_5 с носителем точкой S_{a_1}. Характерной особенностью пучка прямых вырожденной плоскости является то, что он всегда содержит одну вырожденную прямую. В самом деле, из всех точек прямой a_3 найдется одна точка F_{a_3}, визуально совпадающая с точкой S_{a_1}, но несмотря на это, точки S_{a_1} и F_{a_3} различны и определяют единственную вырожденную прямую принадлежащую рассматриваемому пучку прямых вырожденной плоскости α_5.

Для построения в расплющенном пространстве пучка плоскостей воспользуемся следующим утверждением: в расплющенном пространстве любая прямая и не принадлежащая ей точка определяют единственную плоскость. Возьмем в этом пространстве (рис.87), определенном первоначальными плоскостями α_1, α_2, α_3 и α_4, произвольную прямую b_{AB} и ряд точек $C_{a_2}, D_{a_2}, E_{a_2}, F_{a_2}\ldots$ на основной прямой a_2. Очевидно, ни одна из точек, принадлежащих прямой a_2, не может принадлежать прямой b_{AB}. В противном случае или точка A_{α_1}, принадлежит плоскости α_2, или точка B_{α_2} принадлежит плоскости α_1, что противоречит заданному условию принадлежности точек A_{α_1} и B_{α_2} плоскостям α_1 и α_2. Таким образом, ни одна из точек C_{a_2}, D_{a_2}, E_{a_2}, $F_{a_2}\ldots$ не принадлежит прямой b_{AB}. Тогда, прямая b_{AB} и каждая из точек прямой a_2 определяют плоскости: $\alpha_5 \equiv (b_{AB} \times C_{a_2})$, $\alpha_6 \equiv (b_{AB} \times D_{a_2})$, $\alpha_7 \equiv (b_{AB} \times E_{a_2})$, $\alpha_8 \equiv (b_{AB} \times F_{a_2})$

Множество этих плоскостей имеют одну общую прямую b_{AB}, поэтому они представляют пучок плоскостей расплющенного пространства. Среди всех плоскостей одна из них окажется вырожденной плоскостью рассматриваемого пучка. Такая вырожденная плоскость определится прямой b_{AB} и точкой F_{a_2} визуально совпадающей с прямой b_{AB}, но по индексу не принадлежащей ей. На рис.87 эта плоскость α_8. Однако за точки, определяющие совместно с прямой b_{AB} плоскости, могут быть приняты любые определенные точки расплющенного пространства. Осью пучка прямых расплющенного пространства может быть и вырожденная прямая, например d_{GH} (рис. 87). Все плоскости такого пучка α_{10}, α_{11}, α_{12}, ... окажутся также вырожденными плоскостями. Пучок плоскостей, имеющий осью вырожденную прямую, не содержит ни одной невырожденной плоскости.

Таким образом, в расплющенном пространстве мы определили три формы первой ступени- прямолинейный ряд точек, пучек прямых и пучек плоскостей. Каждая из этих форм может быть получена сечением или проектированием другой формы. В самом деле, плоское сечение пучка плоскостей дает пучек прямых, так как любая не проходящая через ось b_{AB} плоскость α_{13} (рис.87), по теореме 2. пересечет ось b_{AB} в единственной точке $J_{\alpha_{13}b}$, а каждую из плоскостей α_5, α_6, α_7, α_8 ...,согласно теореме I, по прямой. Множество этих прямых пройдут через точку $J_{\alpha_{13}b}$, принадлежащую секущей плоскости α_{13} и представят плоский пучек прямых. Прямые пучка прямых по аксиоме I_9 с прямой, лежащей в плоскости пучка, пересекутся каждая в единственной точке и образуют на ней ряд точек. Пучок прямых может быть получен и проектированием (рис.87). Проектируя точки C_{a_2}, D_{a_2}, F_{a_2}, E_{a_2} . . . прямой a_2 из произвольной точки, например, B_{α_2}, по аксиомам I_1 и I_2

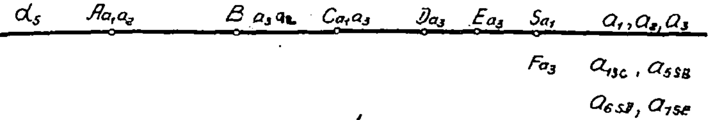


Рис. 86

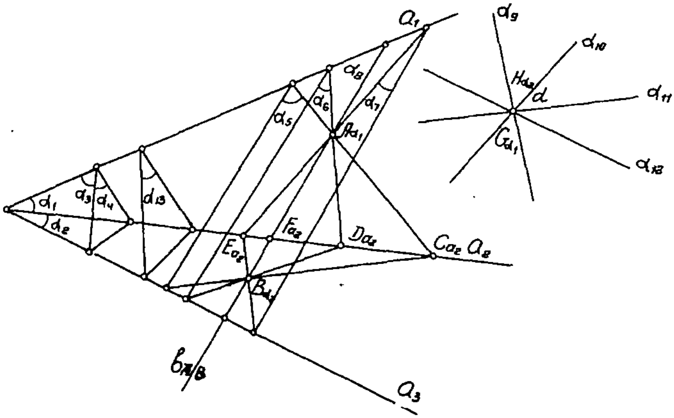


Рис. 87

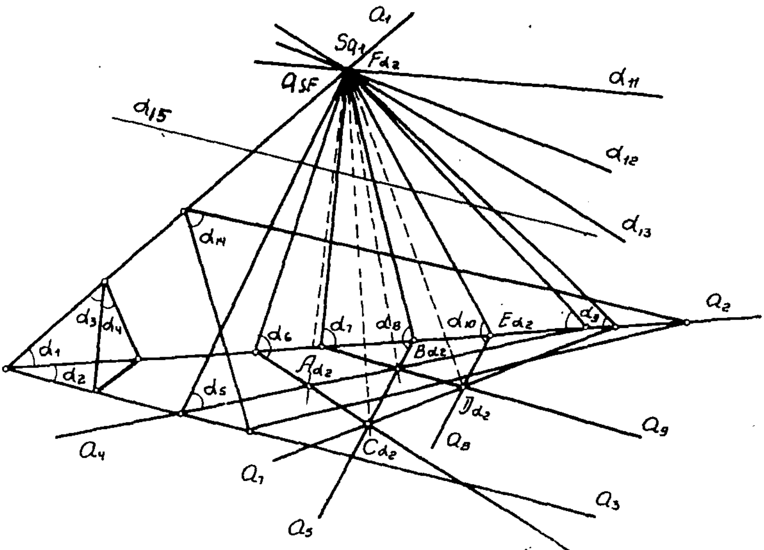


Рис. 88

получим пучек прямых $B_{\alpha_2}C_{a_2}, B_{\alpha_2}D_{a_2}, B_{\alpha_2}F_{a_2}, B_{\alpha_2}E_{a_2} \cdots$ с центром в точке B_{α_2}. Проектируя же этот пучек прямых из точки A_{α_1}, по аксиомам $\bar{I}_4$ и $\bar{I}_5$ получим пучек плоскостей α_5, α_6, α_7, α_8 ... с осью $A_{\alpha_1}B_{\alpha_2}$.

Любая плоскость в расплющенном пространстве с множеством точек с индексом принадлежности к этой плоскости определит плоское точечное поле расплющенного пространства. Также определяется множество прямых плоскости. Множество точек, принадлежащих вырожденной плоскости, определит вырожденное плоское точечное поле расплющенного пространства.

Проектированием плоского точечного поля расплющенного пространства из какого-либо центра, не принадлежащего взятому полю, определится связка прямых и плоскостей расплющенного пространства. Действительно, пусть (рис. 88) на плоскости отображений основными плоскостями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 определено расплющенное пространство, в котором на плоскости α_2 построено плоское поле точками A_{α_2}, B_{α_2}, C_{α_2}, D_{α_2}, E_{α_2}... Эти точки определят также прямые $a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \cdots$ и т.д. Спроектируем указанное поле из точки S_{a_1}, не принадлежащей плоскости α_2. Тогда каждая точка плоскости α_2 совместно с точкой S_{a_1} по аксиоме $\bar{I}_1$ определит прямую, проходящую через точку S_{a_1}, а каждая прямая плоскости α_2 совместно той же точкой-плоскость, содержающую точку S_{a_1}. Получим множество прямых $S_{a_1}A_{\alpha_2}$, $S_{a_1}B_{\alpha_2}$, $S_{a_1}C_{\alpha_2}$, $S_{a_1}D_{\alpha_2}$, $S_{a_1}E_{\alpha_2}$.. и множество плоскостей $\alpha_5 \equiv (a_4 \times S_{a_1})$, $\alpha_6 \equiv (a_6 \times S_{a_1})$, $\alpha_7 \equiv (a_9 \times S_{a_1})$, $\alpha_8 \equiv (a_5 \times S_{a_1})$, $\alpha_9 \equiv \equiv (a_7 \times S_{a_1}) \cdots$, принадлежащих одной точке S_{a_1}, а поэтому определяющих связку прямых и плоскостей расплющенного пространства с центром в точке S_{a_1}. Связка расплющенного пространства всегда содержит одну вырожденную прямую и множество вырожденных плоскостей, принадлежащих этой прямой, В самом деле, на плоскости α_2 найдется такая точка F_{α_2}, которая визуально будет совпадать с точкой S_{a_1}, но имея отличный от нее индекс, будет определять совместно с точкой S_{a_1} вырожденную прямую a_{SF}. Вырожденные плоскости $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_3 \ldots$, принадлежащие прямой a_{SF}, будут принадлежать так же и точке S_{a_1}, а потому явятся плоскостями связки с вырожденной осью в точке S_{a_1}. Любая плоскость не проходящая через центр S_{a_1}, пересечет рассматриваемую связку по плоскому полю. Например, плоскость α_{14} не проходит через точку S_{a_1}, поэтому она каждую прямую связки, по теореме 2, пересечет в единственной точке, а каждую плоскость связки, согласно теореме I, по единственной прямой. Множество полученных таким образом точек и прямых на плоскости α_{14} определит плоское поле. При пересечении этой связки вырожденной плоскостью α_{15} также получим вырожденное плоское поле точек и прямых. Если центр связки S_{a_1} — несобственный, то тогда прямые связки окажутся параллельными, а плоскости - плоскостями пересекающимися по этим параллельным прямым. Как было показано выше, все вырожденные прямые расплющенного пространства параллельны между собой, а вырожденные плоскости пересекаются по вырожденным прямым. Поэтому множество вырожденных прямых и плоскостей расплющенного пространства определяют связку прямых и плоскостей с центром в несобственной точке.

Так, в расплющенном пространстве может быть определено множество форм второй ступени- плоские поля и связки. Само же расплющенное пространство, определенное четырьмя основными плоскостями α_1, α_2, α_3 и α_4, содержит геометрические формы первой и второй ступеней и является геометрической формой третьей ступени- расплющенным трехмерным пространством, т.е. совокупностью множества точек и плоскостей.

Основываясь на выполнимости проективных аксиом, приходим к выводу,что в расплющенном пространстве имеет место гармоничность точек, прямых и плоскостей , а на основании этого проективное соответствие между прямолинейными рядами, пучками прямых, пучками плоскостей , плоскими точечными полями и связками расплющенного пространства. Все вышесказанное аналогично установлению проективного соответствия в невырожденном трехмерном пространстве. Следовательно ,расплющенное трехмерное пространство является плоскостной моделью обычного невырожденного пространства.

ГЛАВА У

МЕТРИКА ПЛОСКОСТНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В предыдущих главах мы показали возможность построения на плоскости изображений множества элементов трехмерного пространства ("точек", "прямых" и " плоскостей"), выполняющих все проективные аксиомы. Теперь естественно поставить вопрос о возможности построения проективной метрики Евклида. Настоящая глава носит формально-принципиальный характер и является повторением известных доказательств из проективной метрики применительно к плоскостной модели трехмерного пространства . Мы здесь не будем учитывать применимость полученных построений в практической графике , считая,конечно,что они окажутся полезным при поисках построений ,имеющих и практическое значение.

§ 24. О кривых и поверхностях второго порядка в расплющенном пространстве

Основываясь на известных теоремах проективной геометрии, при помощи проективных пучков прямых, пучков плоскостей и коррелятивных связок, в расплющенном пространстве мы можем определить кривую второго порядка и поверхность второго порядка. Так как необходимые для этого построения являются следствием исключительно проективных аксиом, то они всегда могут быть осуществлены в расплющенном пространстве.

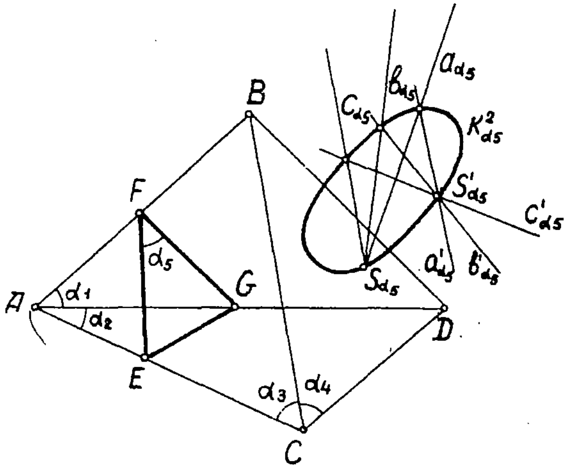
Пусть расплющенное трехмерное пространство дано расплющенным тетраэдром $ABCD$ (рис.89) и требуется задать некоторую кривую второго порядка. Для этого необходимо задать некоторую проективность двух пучков прямых какой-либо плоскости расплющенного пространства. Поэтому первоначально следует задать какую-либо плоскость, например α_5. (Можно было обратиться и к какой-либо из основных плоскостей α_1, α_2, α_3, α_4, что намного упростило бы построение). Зададим две точки этой плоскости S_{α_5} и S'_{α_5} и три пары соответственных прямых $a_{\alpha_5}, b_{\alpha_5}, c_{\alpha_5} \barwedge a'_{\alpha_5}, b'_{\alpha_5}, c'_{\alpha_5}$ принадлежащих этим точкам. Кривая второго порядка $K^2_{\alpha_5}$ определяемая этими пучками, будет принадлежать плоскости α_5. Если же пучки будут заданы в какой-либо вырожденной плоскости, то спроектировав их из какого-либо центра на произвольную невырожденную плоскость, построим в этой плоскости кривую, а затем спроектировав ее обратно на данную вырожденную плоскость, получим множество точек (визуально расположенных на прямой), определяющих кривую второго порядка.

Возможность всех проективных построений, связанных с кривой второго порядка, как построение касательной, точек пересечения с прямой и т.д. совершенно очевидна и не требует особых пояснений.

Также легко можно определить в расплющенном пространстве и поверхность второго порядка. Для этого нужно построить две коррелятивные связки, точки пересечения соответственных элементов которых образуют искомую поверхность второго порядка. Коррелятивные связки легче всего построить при помощи корреляции двух различных или совмещенных полей, проектирование соответственных элементов которых из двух произвольных точек даст пару соответственных элементов двух коррелятивных связок. Например (рис. 90), произвольной четверке прямых a_{α_1}, b_{α_1}, c_{α_1}, d_{α_1} по три не принадлежащих одной точке плоскости α_1, в плоскости α_2 назначим четверку точек A_{α_2}, B_{α_2}, C_{α_2}, D_{α_2}. Как известно, четыре пары соответственных элементов a_{α_1}, b_{α_1}, c_{α_1}, d_{α_1} $\barwedge$ A_{α_2}, B_{α_2}, C_{α_2}, D_{α_2} определят коррелятивную связь полей α_1 и α_2 Теперь выберем произвольные точки S_{α_1} и S_{α_2} и примем их за центры связок. При этом условимся, что S_{α_1} проектирует элементы плоскости α_2, а S_{α_2} элементы плоскости α_1. Каждый элемент этих двух связок однозначно определяется элементами полей α_1 и α_2. Произвольная прямая a_{α_1} плоскости α_1 с центром S_{α_2} определит единственную плоскость α_3. Прямой a_{α_1}, по порреляптивному соответствию a_{α_1}, b_{α_1}, c_{α_1}, d_{α_1} $\barwedge$ A_{α_2}, B_{α_2}, C_{α_2}, D_{α_2} в плоскости α_2 соответствует A_{α_2}, которая с центром S_{α_1} определит единственную прямую $S_{\alpha_1}A_{\alpha_2}$

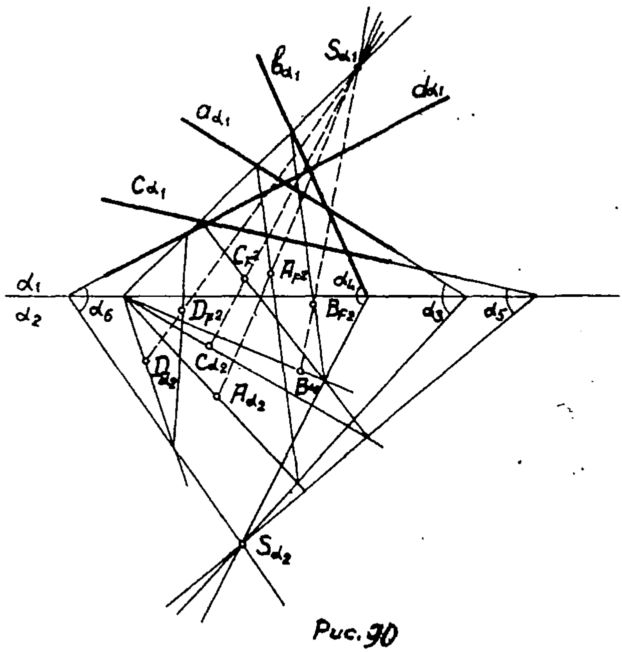
Плоскость α_3 и прямая $S_{\alpha_1}A_{\alpha_2}$ будут коррелятивно соответственными, а потому точка их пересечения A_{F^2} (построенная известным способом и существующая по теореме 2) будет точкой поверхности второго порядка. Аналогично могут быть построены точки B_{F^2}, C_{F^2}, D_{F^2} ... и т.д., множество которых в данном расплющенном пространстве образует поверхность второго порядка, определенную парой коррелятивных связок $S_{\alpha_2}(a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}, c_{\alpha_1}, d_{\alpha_1} \dots) \barwedge$ $\barwedge S_{\alpha_1}(A_{\alpha_2}, B_{\alpha_2}, C_{\alpha_2}, D_{\alpha_2} \dots)$. Эта поверхность, согласно рассуждениям и доказанным теоремам предыдущих глав, будет характеризоваться всеми проективными свойствами поверхностей второго порядка нерасплющенного пространства.

Очевидно, что построенная нами поверхность с любой плоскостью пересекается по кривой второго порядка (действительной или мнимой), которую всегда можно построить.



B
F
G
A
D
E
C
α_1
α_2
α_3
α_4
α_5
$a_{\alpha5}$
$b_{\alpha5}$
$C_{\alpha5}$
$K^2_{\alpha5}$
$S'_{\alpha5}$
$C'_{\alpha5}$
$a'_{\alpha5}$
$b'_{\alpha5}$
$S_{\alpha5}$

Рис. 89



$S_{\alpha1}$
$b_{\alpha1}$
$d_{\alpha1}$
$a_{\alpha1}$
$c_{\alpha1}$
C_F^2
A_{F^2}
α_1
α_2
α_4
α_6
D_{F^2}
B_{F2}
α_3
α_5
$D_{\alpha2}$
$C_{\alpha2}$
$A_{\alpha2}$
$B_{\alpha2}$
$S_{\alpha2}$

Рис. 90

Действительно, пусть секущая плоскость α_7 проходит через один из центров связок, образующих данную поверхность второго порядка. Пусть этот центр будет S_{α_2}. Построим прямые пересечения (теорема I) всех плоскостей связи S_{α_2} с секущей плоскостью α_7. В результате получим пучок прямых $S_{\alpha_2}(a_{\alpha_7})$, принадлежащий секущей плоскости. Пучку прямых $S_{\alpha_2}(a_{\alpha_7})$ соответствует пучок плоскостей $S_{\alpha_1}(\gamma)$ второй связки, ось которого суть прямая, соответствующая секущей плоскости α'_7 в корреляции связок S_{α_1} и S_{α_2}. Точки пересечения соответственных элементов пучков $S_{\alpha_2}(a_{\alpha_7}) \barwedge S_{\alpha_1}(\gamma)$ (построенные по теореме 2) принадлежат одновременно секущей плоскости α_7 и данной поверхности второго порядка, т.е. они образуют искомую кривую пересечения. Легко показать, что эта кривая непременно второго порядка. В самом деле, все точки кривой проектируются проективными пучками прямых $S_{\alpha_2}(\ a_{\alpha_7}\ )$ и $S_{\alpha_1}(\ a'_{\alpha_7}\ )$, представляющих сечение пучка плоскостей $S_{\alpha_1}(\ \gamma\ )$ секущей плоскостью α_7 (построенного по теоремам I и 2).

Секущая плоскость α_7 может не проходить через центры связок S_{α_1} и S_{α_2}, однако кривая пересечения с поверхностью также окажется кривой второго порядка. Построим (по теоремам I и 2) элементы пересечения секущей плоскости α_7 со связками S_{α_1} и S_{α_2}. Очевидно, в плоскости α_7 получим корреляцию прямых и точек. Точки, совпавшие со своими соответственными прямыми , как известно , образуют кривую второго порядка , которая и будет общей для данной поверхности и секущей плоскости α_7 . Исходя из свойств коррелятивных соответствий двух совмещенных полей, эта кривая может быть действительной , мнимой или вырожденной в точку. Каждому случаю будет соответствовать определенное положение секущей плоскости по отношению к поверхности второго порядка. В первом случае плоскость будет пересекать поверхность , во втором - не будет , а в третьем будет касательной.

Из возможности построения в расплющенном пространстве кривой пересечения плоскости с поверхностью второго порядка, следует возможность построения пересечения этой поверхности с прямой. Действительно, в расплющенном пространстве может быть построена вспомогательная плоскость, принадлежащая секущей прямой. Далее, как только что показали, может быть построена кривая пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью второго порядка, а затем точки встречи этой кривой с данной прямой, которые и будут искомыми.

Покажем, что из любой точки расплющенного пространства можно провести множество касательных к данной поверхности второго порядка, образующих касательный действительный или мнимый конус этой поверхности.

Пусть даны в расплющенном пространстве поверхность второго порядка F^2 и некоторая точка A. Проведем через эту точку множество плоскостей $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot)$. Построим кривые пересечения проведенных через данную точку A плоскостей α_1, α_2, α_3 · · ·... с данной поверхностью второго порядка F^2. В результате получим множество кривых второго порядка K_1^2, K_2^2, K_3^2 ..., принадлежащих плоскостям α_1, α_2, α_3 ... Через точку A проведем множество касательных к этим кривым. Известно, что все такие точки касания лежат в некоторой одной плоскости γ

и поэтому расположены на некоторой кривой второго порядка, которая с точкой A образует касательный к данной поверхности конус второго порядка.

Плоскость γ и точка A полярно сопряжены относительно рассматриваемой поверхности. Очевидно, таким путем для любой точки расплющенного пространства можно получить единственную плоскость, полярно сопряженную с рассматриваемой.

Таким образом, мы убеждаемся, что каждая поверхность второго порядка в расплющенном пространстве устанавливает определенный поляритет между его точками и плоскостями, характеризующийся всеми свойствами поляритета, установленного в невырожденном трехмерном пространстве. Поэтому поверхность второго порядка в расплющенном пространстве можно задать не только коррелятивными связками, но и пространственным поляритетом расплющенного пространства. Тогда она определится как геометрическое место точек, совпадающих с соответственными плоскостями.

Для расплющенного пространства, очевидно, справедливы следующие известные теоремы проективной геометрии:

ТЕОРЕМА. Если на прямой P взять произвольную точку M, то ее поляра m пересечет прямую P в точке N, составляющей с M пару в некоторой инволюции, определяемой положением прямой P относительно данной кривой второго порядка.

ТЕОРЕМА. Если взять на плоскости произвольную точку P, выбрать произвольную прямую P и задать на ней какую-нибудь инволюцию, то через каждую точку плоскости пройдет единственная кривая второго порядка, по отношению к которой точка P и прямая P будут полюсом и полярой, а инволюция на прямой P – инволюцией сопряженных точек по отношению к этой кривой.

Эти плоскостные теоремы легко обобщаются для трехмерного проективного пространства и формулируются в следующем виде:

ТЕОРЕМА. Если на плоскости α взять произвольную точку M, то ее поляра β пересечет плоскость α по прямой m, составляющей с точкой M пару в некотором поляритете, определенном положением плоскости α относительно к данной поверхности второго порядка.

ТЕОРЕМА. Если взять в пространстве произвольную точку P, выбрать произвольную плоскость α и задать на ней какой-либо поляритет, то через кажду точку пространства будет проходить единственная поверхность второго порядка, по отношению к которой точка P и плоскость α будут полюсом и полярой, а поляритет на плоскости α – поляритетом сопряженных элементов по отношению к этой поверхности.

Из указанных теорем следует, что в трехмерном проективном пространстве существует множество поверхностей второго порядка, которые на единственной определенной плоскости устанавливают один и тот же поляритет, проектируемый из полюсов (соответствующих выбранной плоскости), связками сопряженных прямых и плоскостей для каждой поверхности второго порядка.

Следовательно, особое множество таких поверхностей второго порядка и поляритет на особой плоскости, определяя друг друга, взаимно связаны между собой. Если задать в трехмерном пространстве множество поверхностей второго порядка, то этим вполне определится положение особой плоскости и поляритет на ней, и наоборот, задание поляритета на некоторой плоскости определяет в пространстве особое множество поверхностей второго порядка. Ясно, что фундаментальная кривая поляритета одновременно принадлежит всем поверхностям рассматриваемого множества, так как является кривой пересечения плоскости поляритета со всеми поверхностями. Отсюда следует возможность определения каждой поверхности при помощи четырех точек трехмерного пространства. В самом деле, пусть в трехмерном пространстве на некоторой плоскости α задан какой-либо поляритет и кривая K^2 является фундаментальной кривой этого поляритета. Каждая поверхность второго порядка, проходящая через кривую K^2, принадлежит рассматриваемому множеству поверхностей. Но существование этой кривой равносильно заданию пяти точек не лежащих на одной прямой. Поэтому любая четверка точек трехмерного пространства с указанными пяти, дает девятку точек, которыми, как известно, определяется единственная поверхность второго порядка.

Приняв справедливым вышеизложенное так же и для плоскостной модели трехмерного проективного пространства, мы можем приступить к построению евклидовой метрики в расплющенном пространстве. При этом еще раз заметим, что нас интересует пока принципиальная сторона вопроса, независимо от практической применимости привлекаемых для этого построений.

§ 25. Построение евклидовой метрики в расплющенном пространстве

Как в обыкновенном трехмерном пространстве, метрика в расплющенном пространстве строится с учетом существования фактически несобственной плоскости, которой всегда дополняется физическое пространство. Как мы знаем, она в расплющенном пространстве вырождается в несобственную прямую плоскости изображения. Построение эвклидовой метрики, в общей проективной форме, всецело основывается на проективных аксиомах, выполнимость которых в расплющенном пространстве нами уже показана. Поэтому возможность ее построения в плоскостной модели несомненна. Метрика плоскостной модели вполне определяется выбором некоторой плоскости, принятой за несобственную, и заданием на ней поляритета (с фундаментальной мнимой центральной кривой второго порядка) принятого за абсолютный поляритет.

Пусть расплющенное пространство задано тетраэдром (рис. 9I) с основными плоскостями α_1, α_2, α_3, α_4. Если плоскость α^{∞} принята за несобственную плоскость, а на ней задан поляритет Π^{∞}, принятый за абсолютный поляритет, то тогда аналогично евклидовому пространству, показывается, что в расплющенном пространстве выполняются все метрические аксиомы, а стало-быть и все движения эвклидового пространства. Абслютный поляритет Π^{∞} на каждой прямой плоскости α^{∞} установит абсолютную инволюцию, определяющую метрики плоскостей , принадлежащих этой прямой. Покажем справедливость указанного прежде всего для основных плоскостей α_1, α_2, α_3 и α_4. Пусть абсолютный поляритет

Π^{∞} на прямых FG, GE и EF устанавливает абсолютные инволюции $i^{\infty}_{\alpha_1}$, $i^{\infty}_{\alpha_2}$ и $i^{\infty}_{\alpha_3}$. Абсолютная инволюция $i^{\infty}_{\alpha_1}$ в плоскости α_1 определит особое множество кривых второго порядка, проходящих через двойные мнимые точки этой инволюции. Центр каждой кривой этого множества будет полярно сопряжен с прямой FG , а сопряженные точки инволюции $i^{\infty}_{\alpha_1}$ спроектируются из этого центра сопряженными направлениями. Указанные кривые будут окружностями плоскости α_1. Известно, что приняв какую-либо окружность за единичную, в плоскости α_1, можем выполнить все плоскостные метрические построения, соответствующие измерению отрезков и углов, их откладыванию, движению совмещению и т.д. Метрики плоскостей α_2 и α_3 аналогично определятся абсолютными инволюциями $i^{\infty}_{\alpha_2}$ и $i^{\infty}_{\alpha_3}$. Для определения же метрики плоскости α_4 следует построить прямую пересечения JK этой плоскости с несобственной плоскостью α^{∞}. На прямой JK, как на несобственной прямой, абсолютный поляритет установит абсолютную инволюцию $i^{\infty}_{\alpha_4}$, которая и определит метрику плоскости α_4. Таким образом мы можем определить метрику на любой невырожденной плоскости, заданной точками тетраэдра $ABCD$.

Покажем, что поляритет Π^{∞} определяет метрику и на каждой вырожденной плоскости. Действительно, вырожденная плоскость α_5 (рис. 92) пересекается с несобственной плоскостью α^{∞} по прямой JK, инволюция $i^{\infty}_{\alpha_5}$ на которой будет абсолютной инволюцией. Далее, спроектируем элементы плоскости α_5 на основную плоскость α_2 из точки S^{∞} плоскости α^{∞}. В результате треугольник GFE и прямая JK с инволюцией $i^{\infty}_{\alpha_5}$ спроектируются в треугольник G_oFE и прямую J_oK_o с инволюцией i^{∞}_o. При помощи инволюции i^{∞}_o и определяемых ею " окружностей" можно произвести все требуемые построения. Затем полученные построения спроектируем по тому же направлению обратно на вырожденную плоскость α_5. Получим метрические построения в вырожденной плоскости. Точно так же можно выполнить построения для любой вырожденной плоскости.

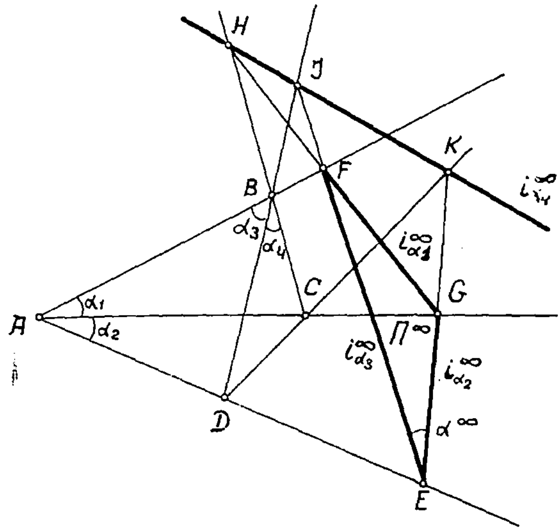

H
J
K
F
B
$i^\infty_{\alpha_4}$
α_3
α_4
$i^\infty_{\alpha_1}$
C
G
α_1
A
α_2
Π^∞
$i^\infty_{\alpha_3}$
$i^\infty_{\alpha_2}$
D
α^∞
E

Рис. 91

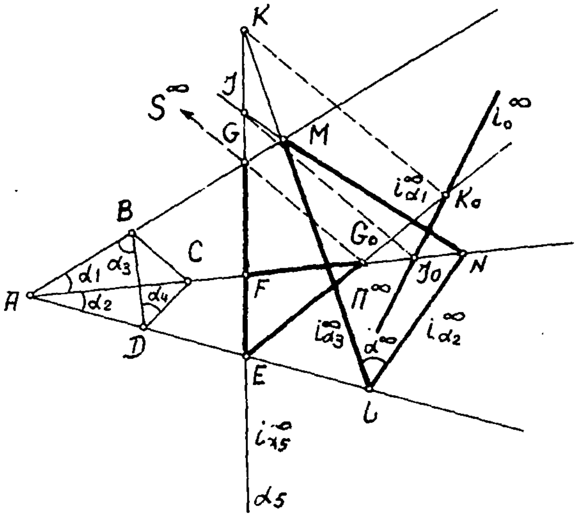
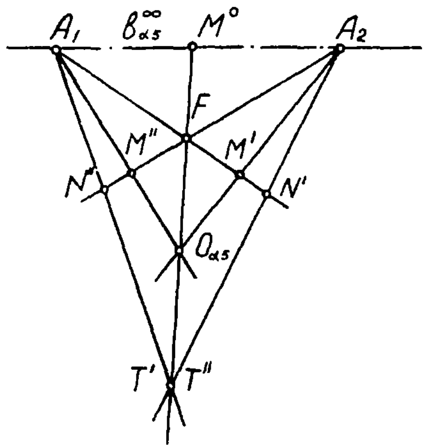

K
J
S^∞
G
M
i_0^∞
$i^\infty_{\alpha_1}$
K_0
B
G_0
C
α_1
α_3
J_0
N
A
F
α_2
α_4
Π^∞
$i^\infty_{\alpha_3}$
$i^\infty_{\alpha_2}$
D
α^∞
E
L
$i^\infty_{\alpha_5}$
α_5

Рис. 92

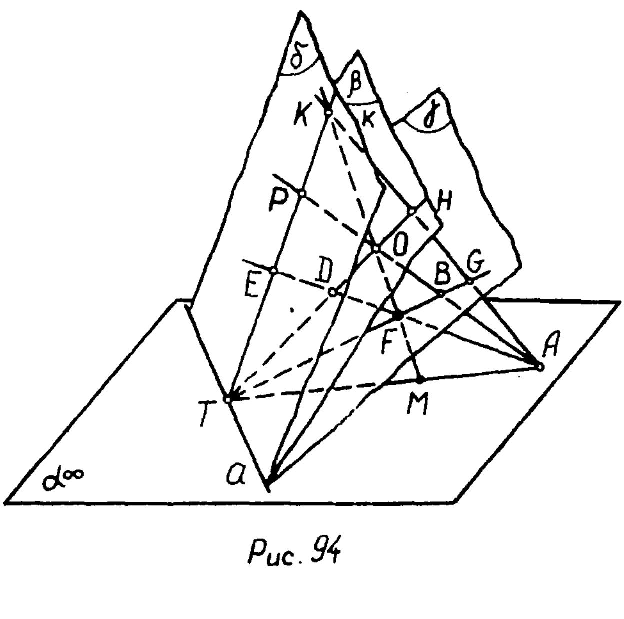
Абсолютный поляритет Π^{∞} в расплющенном пространстве образует особое множество поверхностей, каждая из которых будет такой, что несобственная плоскость γ^{∞} явится полярой некоторой точки O относительно к этой поверхности, а сопряженные элементы поляритета Π^{∞} спроектируются из точки O в сопряженные плоскости и прямые. Так в расплющенном пространстве определяются "шаровые" поверхности, при помощи которых в расплющенном пространстве можно выполнять все пространственные метрические построения: откладывание отрезков и углов, их измерение, опускание перпендикуляров и т.д.

Все движения и совмещения в расплющенном пространстве также будут осуществляться как проективные преобразования, оставляющие в покое соответствующие элементы абсолютного поляритета. Все окружности, определяемые абсолютными инволюциями, могут быть построены следующими известными проективными построениями. Пусть точки A_1 и A_2 являются сопряженными точками в инволюции на несобственной прямой $b^{\infty}_{\alpha_\Gamma}$ (рис.93). Точки A_1 и A_2 соединим с точками O_{α_Γ}, F_{α_Γ} и построим точки M' и M'' пересечением прямых $A_2O_{\alpha_\Gamma}\times A_1F_{\alpha_\Gamma}$ и $A_1O_{\alpha_\Gamma}\times A_2F_{\alpha_\Gamma}$. По тройкам A_1, F_{α_Γ}, M' и A_2, F_{α_Γ}, M'' построим четвертые гармонические N' и N''. Далее построим прямую $O_{\alpha_\Gamma}F_{\alpha_1}$ и ее пересечение с прямой $b^{\infty}_{\alpha_\Gamma}$ точку M^0. Прямые A_2N' и A_1N'' пересекут прямую $O_{\alpha_\Gamma}F_{\alpha_\Gamma}$ в точках T' и T''. Покажем, что точки T' и T'' совпадают. В самом деле, так как четверка точек A_1, F_{α_Γ}, M', T' гармоническая, то очевидно, четверка точек M^0, F_{α_Γ}, O_{α_Γ}, T' также будет гармонической. Аналогично гармонизм точек M^0, F_{α_Γ}, O_{α_Γ}, T'' определяется гармонизмом точек A_2, F_{α_Γ}, M'', N''. Поэтому, сравнивая гармонические чет-



A_1
$b_{\alpha 5}^{\infty}$
M^0
A_2
F
M''
M'
N''
N'
$O_{\alpha 5}$
T'
T''

Рис. 93



δ
β
γ
K
K
P
H
O
E
D
B
G
F
A
T
M
a
α∞

Рис. 94

верки M^0, F_{α_5}, O_{α_5}, T' и M^0, F_{α_5}, O_{α_5}, T'', мы заключаем, что точки T' и T'' совпадают. При этом расположение точек M^0, F_{α_5}, O_{α_5}, T' не зависит от инволюционной пары точек A_1 и A_2.

Если теперь точку A_1 будем перемещать по прямой $b^{\infty}_{\alpha_5}$, то прямая $A_1F_{\alpha_5}$ опишет пучок с центром в точке F_{α_5}, а прямая A_2T пучок с центром в точке T'. Эти два пучка, как проектирующие инволюционные ряды, проективны, стало-быть, пересечение соответственных лучей опишет кривую второго порядка, проходящую через точки F_{α_5} и T'.

Шаровая поверхность F^2 строится аналогично кривой второго порядка. На плоскости α^{∞} (рис. 94) возьмем прямую a и точку A сопряженных в заданном поляритете. Пусть точка O — центр шаровой поверхности, а F - точка, через которую она должна пройти. Прямой a и точкой O построим плоскость β, точками же O и A прямую OA. Далее построим плоскость γ, проходящую через a и F и прямую AF. Пусть плоскость γ пересекает прямую OA в точке B, а прямая FA — плоскость β в точке D. Очевидно, прямая OF пересечет плоскость α^{∞} в точке M, лежащей непременно на прямой TA и представляющей пересечение плоскости TOA с плоскостью α^{∞}. Теперь для тройки точек A, F, D построим четвертую гармоническую E. Плоскость δ пересечет прямые OA и OF в точках P и K. Точки T, E, P и K лежат на одной прямой. Для тройки точек T, F, B найдем также четвертую гармоническую G. Прямая AG пересечет прямые TO и FO в некоторых точках H и K'. Покажем, что точки K' и K совпадают. Действительно, точки M, F, O, K гармонические, они представляют собой проекции гармонических точек A, F, D, E. Но и четверка точек M, F, O, K' также гармоническая, так как она проектируются гармоническими лучами AM, AF, AB и AG. Сравнивая гармонические точки M, F, O, K и M, F, O, K', мы убеждаемся, что точки K и K' совпадают. Таким образом, расположение точек M, F, O, K не зависит от выбора сопряженных пар a и A. Следовательно, двигая точку A по плоскости α^{∞}, получим связку прямых с центром в точке K и связку плоскостей с центром в точке F. Эти две связки будут коррелятивно соответственными, ибо они проектируют поляритет, первоначально заданный на плоскости α^{∞}. Поэтому точки пересечения прямых связки (K) с соответствующими плоскостями связки (F) образуют поверхность второго порядка, проходящую через центры связок K и F.

Таким образом, задание поляритета на несобственной плоскости α^{∞} равносильно определению евклидовой метрики в расплющенном пространстве. Однако, не любой поляритет определяет евклидову метрику. Произвольное задание поляритета может привести нас к псевдометрике или вообще к неевклидовой метрике. Для задания именно евклидовой обычной метрики, необходимо, чтобы определяющий ее поляритет был непременно круговым или эллиптическим с мнимой в обоих случаях фундаментальной кривой. Покажем способы задания такого поляритета.

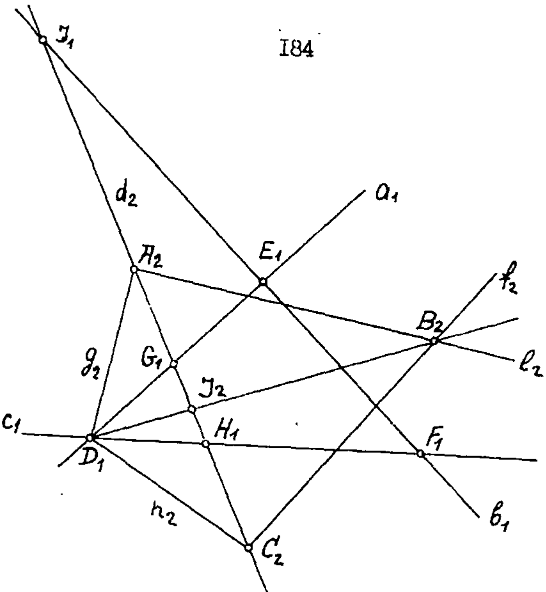
Как известно, поляритет является инволюционной корреляцией одной и той же плоскости. Поэтому он определяется менее чем четырьмя парами соответственных элементов.

Пусть a_1, c_1 и A_2, C_2 являются парами соответственных элементов некоторого поляритета (рис. 95). Так как полярное соответствие сохраняет инцидентность, то поэтому точке D_1 соответствует прямая d_2, проходящая через точки A_2 и C_2. Ввиду инволюционности соответствия точкам G_1 и H_1 соответствуют прямые g_2 и h_2. Точками $G_1 \barwedge A_2$ и $H_1 \barwedge C_2$ на прямой d_2 устанавливается определенная i_{d_2}. В связи с этим, если b_1 третья произвольная прямая указанного поляритета, то соответствующая ей точка B_2 непременно должна лежать на прямой $D_1 J_2$. При этом J_2 соответствует J_1 в инволюции i_{d_2}. Теперь мы имеем соответствия $a_1(D_1, G_1, E_1) \barwedge A_2(d_2, g_2, e_2)$ и $c_1(D_1, H_1, F_1) \barwedge C_2(d_2, h_2, f_2)$, которыми вполне определяется поляритет. Соответственные элементы поляритета могут быть построены однозначно известным способом. Поляритет может быть задан еще двумя способами: двумя прямыми с инволюциями на них и полюсами этих прямых, или тремя прямыми и тремя инволюциями на них.

Пусть теперь дан некоторый поляритет Π и требуется определить - является ли он круговым или эллиптическим. Для этого следует обратиться к несобственной прямой плоскости, в которой задан рассматриваемый поляритет.

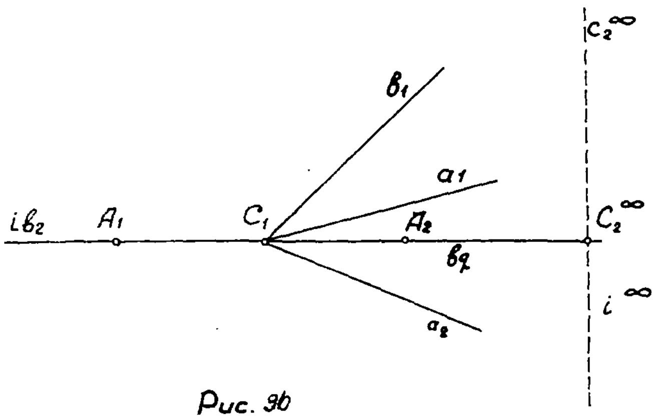
Предположим, что по данному поляритету точка C_1 полюс несобственной прямой c_2^{∞} (рис. 96). Тогда, инволюция i^{∞} из точки C_1 спроектируется инволюцией сопряженных направлений пучка (C_1), при этом на каждой из этих прямых определится инволюция, соответствующая рассматриваемому поляритету. Теперь мы укажем на очевидный признак, по которому определяется характер поляритета.

Если две пары сопряженных направлений a_1, a_2 и b_1, b_2, исходящих из центра C_1 перпендикулярны, а сопряженные точки A_1 и A_2 находятся по разные стороны от него, то фундаментальная кривая поляритета мнимая окружность. Если при тех же условиях пары сопр-



J_1
d_2
a_1
E_1
A_2
f_2
B_2
l_2
g_2
G_1
J_2
c_1
H_1
F_1
D_1
h_2
b_1
C_2

Рис 95



c_2^{∞}
b_1
a_1
ib_2
A_1
C_1
A_2
C_2^{∞}
bq
i^{∞}
a_2

Рис. 96

женных направлений a_1, a_2 и b_1, b_2 не перпендикулярны , но разделяют друг друга , то тогда фундаментальная кривая мнимый эллипс.

По этому признаку при определении метрики расплющенного пространства всегда можно будет задать поляритет устанавливающий евклидову метрику.

§ 26. Метрические построения в расплющенном пространстве

В предыдущих параграфах мы стремились показать только принципиальную возможность построения проективной метрики в расплющенном пространстве . Как убедились , проективная метрика расплющенного пространства вполне тождественна с метрикой невырожденного трехмерного пространства и определяется заданием поляритета на несобственной плоскости. Поэтому в расплющенном пространстве вполне осуществимы все метрические построения. Однако, как легко заметить, все они связаны с построениями кривых и поверхностей второго порядка, принятых за окружности и шаровые поверхности, а потому трудно выполнимы в расплющенном пространстве. Практическая же графика требует нахождения наипростейшего решения в смысле графических построений, выполняемых при помощи простейших чертежных инструментов.

В настоящем параграфе, используя полученные выше результаты, мы попытаемся построить проективную матрику расплющенного пространства, имея в виду и практическую осуществимость построений. При этом, мы будем считать, что в расплющенном пространстве метрика уже построена и все теоремы евклидовой метрики доказаны.

Докажем предложение:

Проективная метрика на плоскости вполне определяется заданием длин сторон какого-либо треугольника, принадлежащего этой плоскости.

Пусть дан треугольник ABC (рис. 97) и несобственная прямая a^{∞} в его плоскости, на которой задана некоторая эллиптическая инволюция принятая за абсолют плоскости. Как мы знаем, инволюция на несобственной прямой a^{∞} определяет пучок кривых второго порядка проходящих через мнимые двойные точки и представляющих окружности рассматриваемой метрики. Эта метрика дает возможность измерения сторон заданного треугольника ABC. Для этого надо с центром в точке A описать единичную " окружность" K^2, которая на сторонах AB и AC даст единичные отрезки AF и AG. Единичный отрезок стороны BC строится следующим известным способом. Через точку A проводится прямая AN^{∞}, "параллельная" BC, и пересечение AN^{∞} с окружностью K^2 точка H проектируются из точки E^{∞} на сторону BC в точку J. Отрезок BJ будет единичным отрезком стороны BC. Затем, "откладывая " отрезки AF, AG и BJ по соответствующим сторонам треугольника, находим числа, определяющие длины этих сторон.

Таким образом, инволюция на несобственной прямой a^{∞} определяет единичные отрезки на сторонах заданного треугольника. Теперь покажем обратное, что задание единичных отрезков на

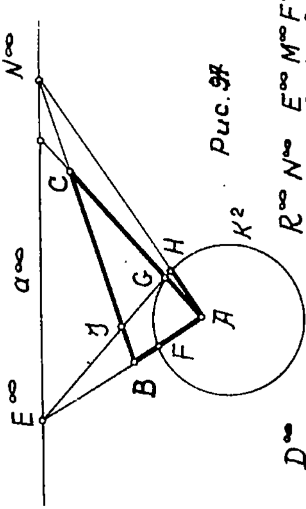


Рис. 91

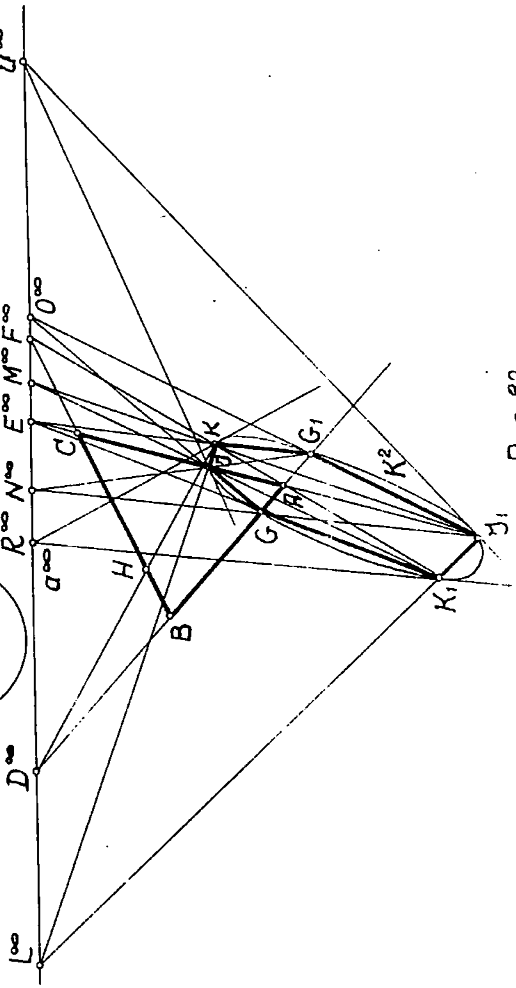


Рис. 92

сторонах треугольника ABC, удовлетворяющих условию треугольника, однозначно определяют эллиптическую инволюцию на прямой a^{∞}.

В самом деле, возьмем произвольный треугольник ABC (рис.98) и несобственную прямую a^{∞}. Тогда точки D^{∞}, E^{∞}, F^{∞} будут несобственными точками прямых AB, AC и BC. На этих прямых зададим единичные отрезки AG, AJ и BH, подобранные так, что „измерив" ими стороны треугольника ABC, получим длины, удовлетворяющие условию треугольника, т. е. сумма длин двух сторон будет больше, а разность меньше длины третьей стороны. Далее отложим от точки A отрезок AK равный BH. Для этого точку A соединяем с F^{∞} и точку H из точки D^{∞} проектируем в точку K. Отрезки BH и AK очевидно будут равные. Теперь, в противоположные стороны от точки A отложим отрезки AG и AJ. Это может быть осуществлено построением четвертых гармонических точек для троек состоящих из концов отрезков и несобственных точек. Так, тройке точек D^{∞}, G, A соответствует четвертая G_1, такая, что D^{∞}, G, A, G_1 гармоническая четверка и поэтому отрезки GA и G_1A будут „равными". Аналогично построим точки K_1 и J_1 гармонически сопряженные с тройками F^{∞}, K, A и E^{∞}, A, J. Эти точки определят отрезки AK_1 и AJ_1 „равные" отрезкам AK и AJ. Таким образом мы получим шесть единичных отрезков, отложенных в разные стороны от точки A. Легко показать, что точки G, J, K, G_1, J_1, K_1 лежат на кривой второго порядка, а точка A и прямая a^{∞} полярно сопряжены относительно этой кривой.

Действительно, шестиугольник $GJKG_1J_1K_1$ удовлетворяет условию теоремы Паскаля. Пары противоположных сторон ($GJ \times G_1J_1$), ($JK \times J_1K_1$) и ($GK_1 \times G_1K$), по построению образуют, каждая по четырехугольнику, для которых единичные отрезки суть диагональные прямые. Например,пара противоположных сторон GJ и G_1J_1 определяет четырехугольник J_1GJG_1. По построению тройки точек J, A, J_1 и G, A, G_1 с точками E^{∞} и D^{∞} составляют гармонические четверки и поэтому стороны GJ и J_1G_1, как противоположные для указанного четырехугольника,пересекутся на прямой d^{∞} в точке O^{∞}.

Из четырехугольников JKJ_1K_1 и GK_1KG_1 также следует, что пересечения противоположных сторон $JK \times J_1K_1$ и $GK_1 \times G_1K$ -точки L^{∞} и E^{∞} лежат на прямой a^{∞} .Следовательно, шестиугольник $GJKG_1J_1K_1$ определяет единственную кривую второго порядка K^2.

Нетрудно видеть,что точка A и прямая a^{∞} полярно сопряжены относительно кривой K^2 . Это следует из известной теоремы о вписанном в кривую второго порядка четырехугольнике, рассмотренном как вырождение шестиугольника. Касательные к кривой K^2 в точках J и J_1 , а также в точках K и K_1 согласно указанной теореме пересекаются на прямой a^{∞} в точках U^{∞} и R^{∞}. Эти точки суть полюсы прямых JJ_1 и KK_1 , стало-быть, их пересечение -точка A представляет собой полюс прямой a^{∞}. Поэтому каждой прямой,проходящей через точку A ,на прямой a^{∞} соответствует полюс,представляющий пересечение касательных к кривой K^2, проведеннвх в точках пересечения рассматриваемой прямой с кривой K^2. Отсюда следует,что прямая a^{∞} , как носительница множества внешних точек, не пересекает кривую K^2. Но кривая K^2, как нами было отмечено, устанавливает инволюцию на прямой a^{∞}, определяющую в плоскости кривой всю евклидову метрику. Таким образом, задание на плоскости треугольника, способа измерения его сторон и несобственной прямой эквивалентно заданию абсолюта плоскости.

Основываясь на этом, метрику плоскости мы можем строить при помощи указанного треугольника, не прибегая к окружностям и абсолюту плоскости, устранив этим самым связанные с ними графические трудности.

Для определения абсолютной инволюции достаточно построить две пары сопряженных направлений, которые в пересечении с несобственной прямой дадут две пары точек этой инволюции. Если для треугольника ABC (рис. 99) при несобственной прямой a^{∞} определены единичные отрезки AM, AG и CN, то соответствующими измерениями получим определенные длины сторон заданного треугольника. Обозначим их соответственно через e_{AB}, e_{AC} и e_{CB}. При помощи этих длин из каждой вершины треугольника ABC может быть опущен перпендикуляр на противоположную сторону, т.е. найдена пара сопряженных направлений. Для этого воспользуемся известными из евклидовой геометрии соотношениями, которые также действительны и в построенной нами проективной метрике плоскости заданного треугольника ABC.

Известно, что основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на сторону AB, делит его с внутренней или внешней стороны на два отрезка AT и TB, для которых имеют место следующие соотношения:

$$AT + TB = AB$$

$$e_{AC}^2 - AT^2 = e_{CB}^2 - TB^2 \qquad (I)$$

Из этих соотношений определим длину одного из отрезков и отложим на стороне AB в соответствующую сторону . В результате этого построим основание перпендикуляра, а следовательно, и перпендикуляр CT . Совершенно аналогично построим и перпендикуляр AR, опущенный из точки A на сторону CB. Пусть перпендикуляры CT и AR пересекаются с несобственной прямой Q^{∞} в точках Q^{∞} и K^{∞}. Ввиду сопряженности направлений CB и AR, так же, как CT и AB , две пары точек Q^{∞}, E^{∞} и $F^{\infty}K^{\infty}$ будут инволюционно сопряжены, и поэтому определят на прямой единственную инволюцию, представляющую собой абсолют метрики определенной треугольником ABC .

После того как при помощи треугольника ABC найдены сопряженные , т.е. перпендикулярные направления, на плоскости треугольника, не прибегая к единичной окружности, для любого отрезка может быть построен единичный отрезок. Покажем справедливость этого, прежде всего , для направлений перпендикулярных к сторонам треугольника ABC. Очевидно, что длина перпендикуляра CT по теореме Пифагора (справедливой и для проективной метрики) определяется известным равенством

$$CT^2 = AC^2 - AT^2$$

Пусть по этому равенству отрезку CT соответствует некоторая длина $\ell_{CT} = n$. Теперь мы должны указать на отрезке CT единичный отрезок соответствующий этой длине, т.е. отрезок, помещающийся в нем n раз. Короче говоря, отрезок $A\bar{G}$ должен быть разделен на n равных частей. Для этого (рис.99), уже известным нам способом, от точки C отложим единичный отрезок AG в какую-либо сторону n раз. В результате получим точки A_1, A_2, ... A_n, определяющие ряд единичных отрезков CA_1, A_1A_2 ... $A_{n-1}A_n$. Построим прямую A_nT, и из несобственной точки S^∞ этой прямой спроектируем точку A_1 на CT в точку A_T. Очевидно, отрезок CA_T, будучи отложен от точки C, поместится в отрезке CT n раз, а потому будет единичным отрезком для него. При помощи единичных отрезков перпендикулярных направлений легко может быть измерен любой отрезок на плоскости треугольника ABC. Предположим, что на плоскости построены (рис. 100) перпендикулярные направления OX и OY с единичными отрезками OA и OB. Определим длину произвольного отрезка CD. Пусть прямая CD встречает X и Y в некоторых точках E и F. Тогда, так как треугольник EOF прямоугольный, то длина стороны EF определится при помощи длин OE и OF (измеренных единичными отрезками OA и OB) соотношением

$$EF = \sqrt{EO^2 + OF^2} = n$$

Разделив отрезок EF на n равных частей (вышеизложенным способом), получим некоторый единичный отрезок EG, определяющий длину отрезка CD.

На основании возможности измерения отрезков любой отрезок может быть отложен по любому другому отрезку. Действительно, пусть даны два отрезка CD и MN (рис. 100). Как только что указывалось, при помощи перпендикулярных направлений X и Y эти отрезки могут быть измерены. Предположим, что после измерения CD имеет длину ℓ_{CD}, а MN длину ℓ_{MN}. Если теперь требуется MN отложить по CD от конца C, то для этого от C отложим единичный отрезок ℓ_{MN} раз. Пусть N^0 конечная точка. Тогда, отрезок CN^0 явится результатом откладывания отрезка MN по CD.

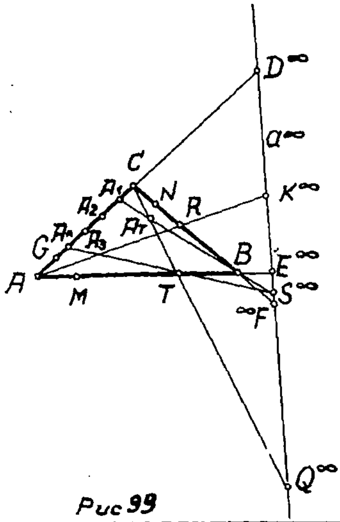


Рис 99

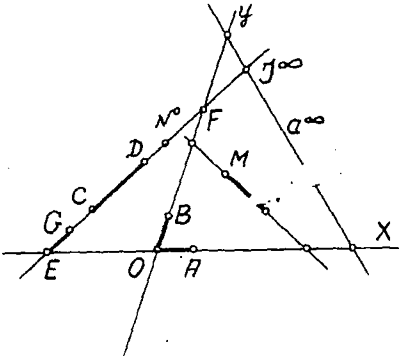


Рис.100

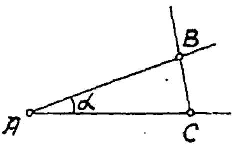


Рис.101

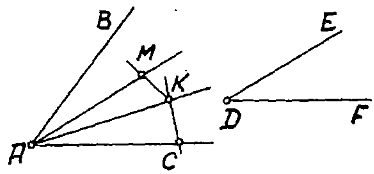
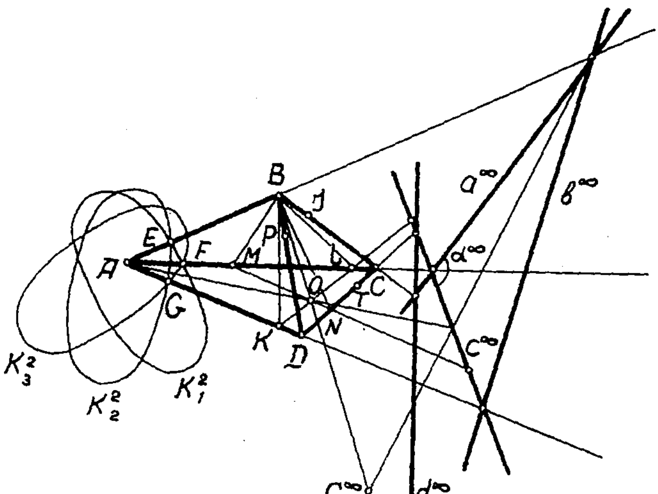


Рис.102



13.

Рис.103

Таким образом, не прибегая к единичной окружности, при помощи заданного треугольника с определенными длинами сторон, на плоскости мы можем откладывать и измерять любые отрезки.

Теперь легко показать, что также не прибегая к помощи единичной окружности, на плоскости можно измерять и откладывать углы. О величине данного угла на плоскости, как известно, можно судить по отношениям длин сторон треугольника, элементом которого он является. Это приводит к тригонометрическим величинам и соотношениям, очевидно, также имеющим место в проективной метрике. Короче говоря, для любого угла на плоскости может быть определено численное значение того или иного тригонометрического соотношения и использовано для сравнения углов

С практической точки зрения (напомним, что принципиальная возможность складывания и измерения углов в расплющенном пространстве была показана выше поляритетом на несобственной плоскости, определенной "шаровой" поверхностью) для измерения и откладывания углов особенно удобно пользоваться тангенсом угла.

Пусть, например, на плоскости с определенной проективной метрикой (рис.IOI) требуется определить тангенс данного угла α. Так как метрика плоскости, которой принадлежит данный угол, задана, то вышеизложенным способом из любой точки B одной стороны угла на другую сторону AC может быть опущен перпендикуляр (построено сопряженное направление для прямой AC). Предположим, что перпендикуляром является BC . Треугольник будет прямоугольным с прямым углом при вершине C. Теперь измерим стороны AC и BC. (Как указывалось выше, при определенной метрике это всегда возможно). Числа, соответствующие длинам AC и BC, обозначим через l_{AC} и l_{BC}. Тогда, искомым тригонометрическим значением будет

$$tg\,\alpha = \frac{l_{BC}}{l_{AC}}$$

Указанное построение может быть выполнено для любого угла рассматриваемой плоскости. Поэтому каждые два угла могут быть сравнены по значениям их тангенсов. Решим теперь обратную задачу. Построим угол, соответствующий заданному значению тангенса. Для этого на плоскости следует построить перпендикулярные направления и от точки их пересечения отложить по сторонам угла отрезки отношением длин, равным заданному значению тангенса. Соответствующий заданному тангенсу угол будет искомым.

При помощи построения угла по данному значению тангенса осуществляется откладывание одного угла по другому углу. Пусть по углу BAC (рис. 102) требуется отложить угол EDF. Вышеуказанным способом определим тангенс угла EDF и на стороне AC, построим угол KAC, равный EDF. Затем такой же угол MAK строим на стороне AK и т.д. Такое откладывание можно повторить сколько угодно раз.

Для измерения углов следует какой-либо угол принять за единицу и тогда каждому другому углу откладыванием единично угла можно приписать определенное число, соответствующее его величине.

Таким образом, мы показали справедливость предложения об определенности на плоскости проективной метрики заданием длин сторон первоначального треугольника.

Докажем теперь предложение:

Проективная метрика расплющенного пространства вполне определяется заданием длин ребер основного тетраэдра.

Пусть дано, что при несобственной плоскости α^∞ и единичных отрезках AE, AF, AG, BP, BJ и CT ребра основного тетраэдра $ABCD$ (рис. 103) имеют определенные длины l_{AB}, l_{AC}, l_{AD}, l_{BD}, l_{BC} и l_{DC}. При этом длины ребер подобраны так, что удовлетворяют условиям треугольников ABC, ACD, ABD и BDC. Указанные треугольники определяют плоскости, которые с несобственной плоскостью пересекаются по четырем прямым a^∞, b^∞, c^∞ и d^∞. В соответствии с вышеизложенным каждый треугольник в определяемой им плоскости устанавливает метрику. Поэтому с любых вершин тетраэдра $ABCD$ на противоположные ребра могут быть опущены перпендикуляры, а при помощи этих перпендикуляров – и перпендикуляры на противоположные грани. Например, метрика плоскости треугольника ABC определяет единственный перпендикуляр BM, опущенный из точки B на прямую AC. Из точки же M в плоскости ACD может быть восстановлен единственный перпендикуляр MN, определенный метрикой этой плоскости. Очевидно, что плоскость BMN окажется перпендикулярной к плоскости ACD. В самом деле, плоскость BMN перпендикулярна к прямой AC, так как она содержит прямые BM и MN, перпендикулярные к прямой AC. Но прямая AC лежит в плоскости ADC. Поэтому плоскость BMN

будет перпендикулярна к плоскости ADC. Ясно, что такое же построение можно произвести для грани ABD и построить плоскость BKL, также перпендикулярную к плоскости ADC. Рассмотрим теперь пересечение плоскостей BMN и BKL прямой BO. Легко усмотреть, что эта прямая перпендикулярна к плоскости ADC. Действительно, являясь пересечением плоскостей BMN и BKL, перпендикулярных к плоскости ADC прямая BO будет перпендикулярной к этой плоскости. Теперь построим точку встречи C^{∞} прямой BO с несобственной плоскостью α^{∞} (как нам известно, она единственна и всегда может быть построена). Прямая c^{∞} и точка C^{∞} будут полярно сопряженными, так как они являются сечением сопряженных прямой BO и плоскости ADC.

Аналогично можно опустить перпендикуляры из вершин A, D и C на грани BDC, ABC и ABD и построить их пересечения с несобственной плоскостью в точках D^{∞}, A^{∞}, B^{∞}, полярно сопряженных с прямыми d^{∞}, a^{∞} и b^{∞}. (Построения на чертеже не показаны). Четыре пары соответственных элементов A^{∞}, B^{∞}, C^{∞}, D^{∞}, и a^{∞}, b^{∞}, c^{∞}, d^{∞}, определят единственный поляритет на плоскости α^{∞}.

Покажем, что „шаровая" поверхность (существующая по известной нам теореме) с центром в точке A и проходящая через точку E, на ребрах тетраэдра $ABCD$ отсечет единичные отрезки, „равные" первоначальным единичным отрезкам. В самом деле, поляритет установленный соответственными парами A^{∞}, B^{∞}, C^{∞}, D^{∞} и a^{∞}, b^{∞}, c^{∞}, d^{∞}, определяет „шаровую" поверхность F^2 с центром в точке A и проходящую через конец единичного отрезка AE точку E. Треугольник же ABC с единичными отрезками AE, AF,

BJ , определяет „окружность" K_1^2 с центром в точке A . „Шаровая" поверхность F^2 и „окружность" K_1^2 имеют общий центр A и радиус AE. Поэтому окружность принадлежит шаровой поверхности F^2. Аналогично покажем, что шаровая поверхность F^2 также проходит через единичные окружности K_2^2 и K_3^2 , определяемые треугольниками ABD и ADC . Следовательно, шаровая поверхность F^2 является „единичной" и на ребрах тетраэдра $ABCD$ отсекает те единичные отрезки AE , AF , AG , BJ , BP , CT , при помощи которых на несобственной плоскости α^∞ был построен поляритет, определяющий эту шаровую поверхность.

Итак, задание на несобственной плоскости α^∞ поляритета равносильно заданию длин ребер первоначального тетраэдра $ABCD$. Поэтому все метрические построения в расплющенном пространстве могут быть выполнены без единичной шаровой поверхности при помощи тетраэдра с определенными единичными отрезками его ребер. Это обстоятельство дает нам возможность получить практически осуществимые построения.

Пусть метрика расплющенного пространства задана тетраэдром $ABCD$, несобственной плоскостью α^∞ и единичными отрезками AE , AF , AG , BK , BJ и DT (рис. 104). Требуется определить длину ℓ_{MN} и единичный отрезок произвольного отрезка MN прямой $P_{\alpha_2} O_{\alpha_1}$

Через заданную прямую $P_{\alpha_2} O_{\alpha_1}$ проведем произвольную плоскость α_5 . Этой плоскости в расплющенном пространстве соответствует определенный треугольник следов HWV , стороны которого суть прямые пересечения плоскости α_5 с плоскостями α_1, α_2 , α_3 . По метрикам плоскостей α_1, α_2 и α_3 , определенных треугольниками

ABC, ADC и ABD стороны треугольника HWV имеют определенные длины и единичные отрезки. Пусть эти длины будут ℓ_{WV}, ℓ_{HV} и ℓ_{HW}. Тогда метрика плоскости α_r определится треугольником HWV. В этой метрике отрезку $P_{\alpha_2}O_{\alpha_1}$ будет соответствовать некоторая длина ℓ_{P_0}, выраженная числом n. Для построения единичного отрезка надо разделить $P_{\alpha_2}O_{\alpha_1}$ на n частей известным нам способом, а именно: от точки P_{α_2} по прямой HV отложим соответствующий единичный отрезок n раз. Получим ряд равных отрезков $P_{\alpha_2}1$, $1,2$, $2,3$, ... $(n-1),n_0$. Построим прямую $O_{\alpha_1}n_0$ и из несобственной точки S^{∞} спроектируем указанный ряд отрезков на отрезок $P_{\alpha_2}O_{\alpha_1}$. Отрезок $P_{\alpha_2}O_{\alpha_1}$ разделится на n равных частей, каждая из которых явится его единичным отрезком. Один из единичных отрезков, например $P_{\alpha}1$, отложим от точки M по отрезку MN. Для этого, единичный отрезок $P_{\alpha}1$ спроектируем на прямую a, параллельную прямой $P_{\alpha_2}O_{\alpha_1}$, в отрезок $P'1'$. Очевидно, отрезок $M1''$, полученный проектированием отрезка $P'1'$ из точки R^{∞} на MN, будет единичным отрезком отложенным от M по отрезку MN. Повторив это откладывание мы получим число, соответствующее искомой длине ℓ_{MN} отрезка MN. Длина ℓ_{MN} не зависит от выбора вспомогательной плоскости α_r. В самом деле, допущение противного приведет к противоречию, т.е., что при определенной метрике расширенного пространства отрезок MN имеет две длины.

Так может быть измерен любой отрезок расширенного пространства. При помощи длин легко осуществить откладывание одного отрезка по другому. Если в расширенном пространстве требуется отрезок AB отложить по отрезку CD, то для этого, измерив

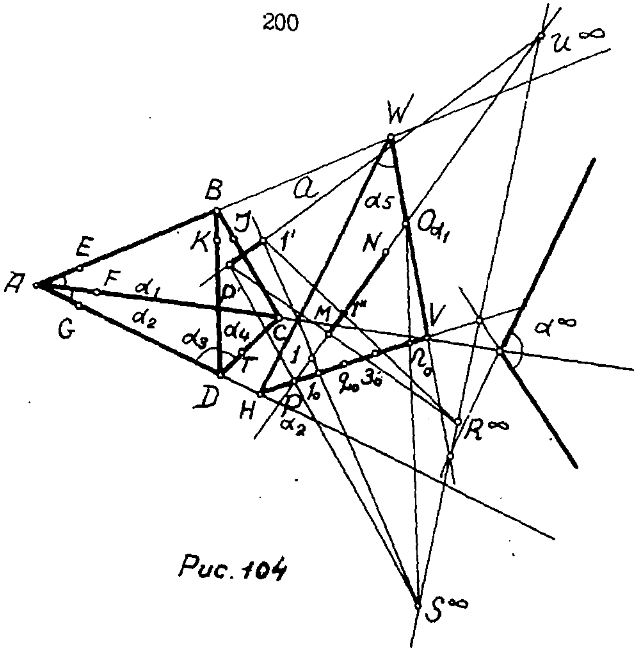


Рис. 104

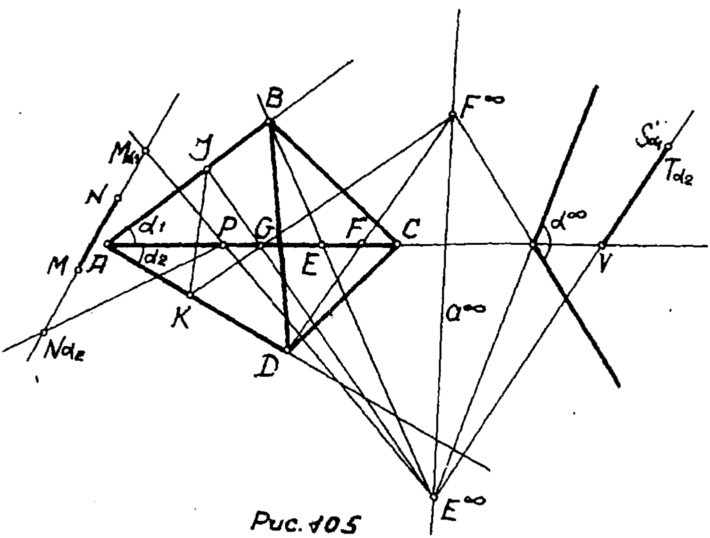


Рис. 105

только что указанным образом оба отрезка и определив для каждого из них единичные отрезки, длину ℓ_{AB} надо отложить по CD от точки C в сторону D в единичных отрезках CD. В результате получим отрезок, равный отрезку AB и отложенный по отрезку CD.

Построения по измерению и откладыванию отрезков в расплющенном пространстве можно значительно упростить соответствующим подбором первоначального тетраэдра. Выше он был взят произвольной формы. Но, подобрав длины ребер так, чтобы угол между какой-либо парой смежных граней оказался прямым, измерение и откладывание отрезков можно осуществить очень легко.

Построим такой тетраэдр. Пусть при определенных длинах ребер AB, AC, AD, BC, DC тетраэдра $ABCD$ (рис. 105) перпендикулярами, опущенными из точек B и D на прямую AC, являются прямые BE и DF. На прямой AC возьмем произвольную точку G. Построим прямые $E^{\infty}G$ и $F^{\infty}G$, пересекающие ребра AB и AD в точках J и K. Три точки G, J, K образуют некоторую плоскость расплющенного пространства. Ясно, что эта плоскость, как содержащая прямые JG и JK перпендикулярные к прямой AC, сама перпендикулярна к этой прямой. Однако угол JGK метрически не может быть определен, так как шестое ребро BD первоначально не имело какой-либо длины и единичного отрезка. Теперь назначим эту длину так, чтобы угол JGK оказался прямым. Для этого определим длину отрезка JK по равенству

$$JK=\sqrt{JG^2+KG^2}=n$$

Разделив отрезок JK на n равных частей, получим определенный единичный отрезок для JK. Теперь метрика грани ABD вполне определена треугольником JAK и может быть измерена длина и найден единичный отрезок для отрезка BD. Очевидно, тетраэдр $AJKG$ окажется искомым, т.е. угол между гранями α_1 и α_2 будет прямым."

При помощи такого тетраэдра гораздо проще можно определить длину и построить соответствующий единичный отрезок любого отрезка, заданного точками граней α_1 и α_2.

Например, измерим произвольный отрезок MN, принадлежащий прямой $M_{\alpha_1} N_{\alpha_2}$

Для этого, построим прямоугольный треугольник $N_{\alpha_2} P M_{\alpha_1}$. По этому треугольнику (зная длины сторон $M_{\alpha_1} P$ и $N_{\alpha_2} P$ по метрикам граней α_1 и α_2), исходя из соотношения

$$M_{\alpha_1} N_{\alpha_2} = \sqrt{M_{\alpha_1} P^2 + N_{\alpha_2} P^2} = n$$

определим длину отрезка $M_{\alpha_1} N_{\alpha_2}$. Разделив этот отрезок на n равных частей и отложив полученный единичный отрезок по отрезку MN (известным из предыдущего нам способом), получим искомую его длину ℓ_{MN}.

Указанный тетраэдр дает возможность также легко определять длины вырожденных отрезков. Нам известно, что в расплющенном пространстве, определенном тетраэдром $ABCD$, точками S_{α_1} и T_{α_2} задается вырожденный отрезок $S_{\alpha_1} T_{\alpha_2}$. Если при помощи прямой $S_{\alpha_1} E^{\infty}$ из точки S_{α_1} на ребро AC опустить перпендикуляр и точку V его встречи с этим ребром соединить прямой с точкой T_{α_2}, то получим прямоугольный треугольник $S_{\alpha_1} V T_{\alpha_2}$ с прямым углом в точке V. Для этого треугольника отрезок $S_{\alpha_1} T_{\alpha_2}$ является гипотенузой, а потому по соотношению

$$S_{\alpha_1} T_{\alpha_2} = \sqrt{S_{\alpha_1} V^2 + T_{\alpha_2} V^2} = n$$

получим его длину $\ell_{M_{\alpha_1}M_{\alpha_2}} = n$. Разделить отрезок $S_{\alpha_1}T_{\alpha_2}$ на n равных частей, для построения его единичного отрезка, как указывалось выше, возможно путем проектирования вырожденной плоскости треугольника $S_{\alpha_1}VT_{\alpha_2}$ на какую-либо невырожденную плоскость.

Таким образом, мы показали, что, не прибегая к единичным шаровым поверхностям и окружностям, в расплющенном пространстве в самом деле могут быть измерены и отложены любые отрезки, если будут заданы длины и единичные отрезки ребер первоначального, определяющего расплющенное пространство, тетраэдра.

Рассмотрим некоторые особенности и частные случаи задания метрики расплющенного пространства.

Как было показано, выбрав в расплющенном пространстве некоторую плоскость и приняв ее за несобственную, при соответствующем поляритете на ней мы тем самым задаем определенную метрику расплющенного пространства. Эта метрика на каждой плоскости определяет некоторую, вообще говоря, проективную метрику. Однако среди всех плоскостей можно указать плоскости, метрика которых аффинная.

Это обстоятельство объясняется тем, что расплющенное пространство мы строим на евклидовой плоскости, дополненной несобственными элементами, вследствие чего среди всех плоскостей расплющенного пространства одна является ~~ин~~ фактически несобственной.

Так, если расплющенным тетраэдром $ABCD$ (рис. 106) на плоскости чертежа определено расплющенное пространство, то вырожденная плоскость α, определенная тремя необоснованными точками ребер AB, AC, AD явится фактически несобствен-

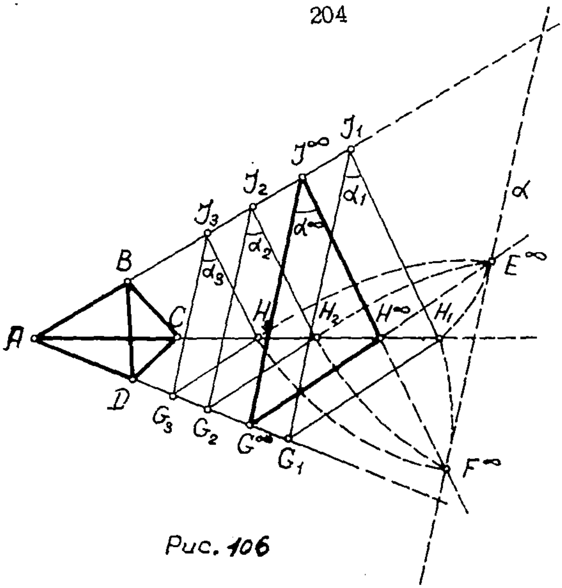


Рис. 106

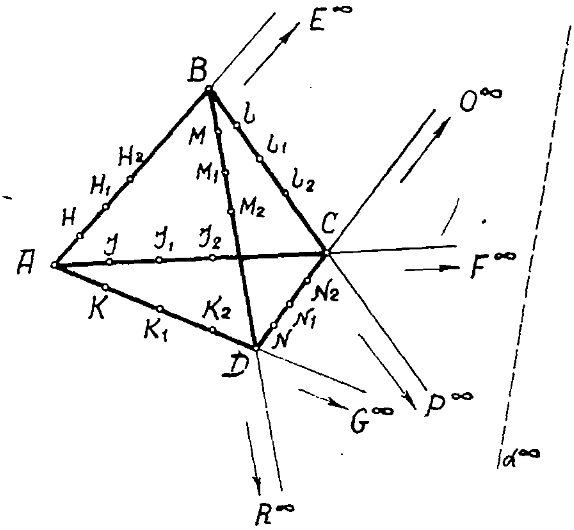


Рис. 107

ной. Среди всех прямых плоскости α^{∞} прямая $E^{\infty}F^{\infty}$, те пересечения с плоскостью α окажется фактически несобственной.

Пусть теперь на плоскости α^{∞} задан поляритет с мнимой фундаментальной кривой (поляритет, как было показано, может быть задан при помощи указания длин ребер тетраэдра $ABCD$ и единичных отрезков для них). Тогда определенная этим поляритетом на прямой $E^{\infty}F^{\infty}$ инволюция, на каждой плоскости, проходящей через эту прямую, определит аффинную метрику, ибо для таких плоскостей несобственная прямая $E^{\infty}F^{\infty}$ будет на самом деле несобственной.

Легко заметить, что плоскостями, на которых заданной метрикой расплющенного пространства $ABCD$ определяется аффинная метрика, будут все плоскости α_1, α_2, α_3 ... и т.д. параллельные несобственной плоскости α^{∞}. В частном случае аффинные метрики плоскостей α_1, α_2, α_3 ... и т.д. могут совпасть с обыкновенной евклидовой метрикой, если заданная тетраэдром $ABCD$ метрика на сторонах треугольников $J_1H_1G_1$, $J_2H_2G_2$, $J_3H_3G_3$ ... и т.д. определит единичные отрезки фактически одинаковой длины.

Покажем, что такой случай на самом деле может иметь место. Действительно, построение расплющенного пространства начнем с расплющенного тетраэдра $AJ_3H_3G_3$ и несобственной плоскости α^{∞}. (треугольники $J_3H_3G_3$ и $J^{\infty}H^{\infty}G^{\infty}$ заранее подобраны с параллельными сторонами, что всегда возможно). Далее, при определении на плоскости α^{∞} поляритета, единичные отрезки сторон треугольника $J_3H_3G_3$ подберем одинаковой длины, а для ребер AJ_3, AH_3 и AG_3 произвольные. Теперь метрика расплющенного пространства, определенного тетраэдром $AJ_3H_3G_3$, будет заданной; она на плоскостях α_1, α_2, α_3 ... и т.д. определит обыкновенную метрику Евклида .

Существует еще один частный случай задания метрики расплющенного пространства. Определим расплющенное пространство тетраэдром $ABCD$ (рис.107). За несобственную плоскость примем фактически несобственную вырожденную плоскость α^{∞}, а за единичные отрезки-некоторые отрезки AH, , BH, BL, DN, измеряющие ребра AB, AC, AD, CD, , . Так как для всех ребер несобственными точками являются фактически несобственные E^{∞}, F^{∞}, G^{∞}, K^{∞}, P^{∞}, O^{∞}, то откладыванию единичных отрезков будет соответствовать откладывание фактически одинаковых длин ($AH=HH_1=H_1H_2\cdots AJ=JJ_1=J_1J_2\cdots AK=KK_1=K_1K_2$ ...и т.д.). В таком случае метрики граней ABC, ABD, ADC и BCD будут аффинными, а потому определяемая ими метрика расплющенного пространства $ABCD$ также явится аффинной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Б.Гуревич. Проективная геометрия, М., Физматгиз, 1960.
2. Н.А.Глаголев. Проективная геометрия, М., "Высшая школа", 1963.
3. Н.А.Глаголев. Начертательная геометрия, М., изд, НКТП, СССР, 1936.
4. Н.Ф.Четверухин. Изображение фигур в курсе геометрии. М. Учпедгиз, 1958.
5. Н.Ф.Четверухин. Проективная геометрия, М., "Просвещение", 1969.
6. О.А.Вольберг. Лекции по начертательной геометрии, М., Учпедгиз, 1947.
7. Н.Ф.Четверухин. Введение в высшую геометрию. М., Учпедгиз, 1935.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ПРОЕКЦИОННОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

ГЛАВА II. КОЛЛИНЕАРНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

ГЛАВА III. ПЛОСКОСТНАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

стр.